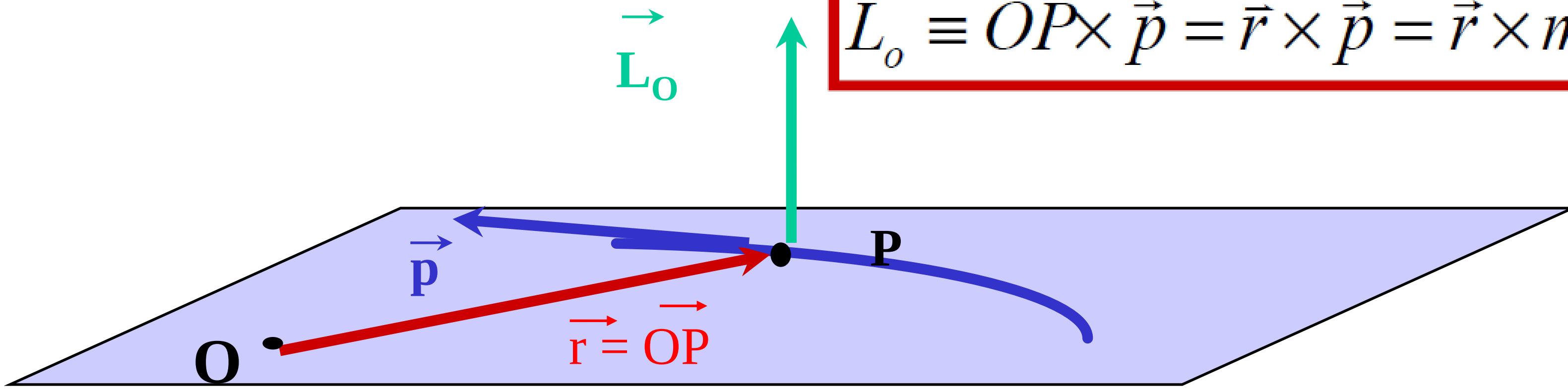
Momento angolare

“Momento angolare” (o “momento della **quantità di moto**”) **rispetto ad un “polo” O** di un punto materiale **P** avente quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$ **:**

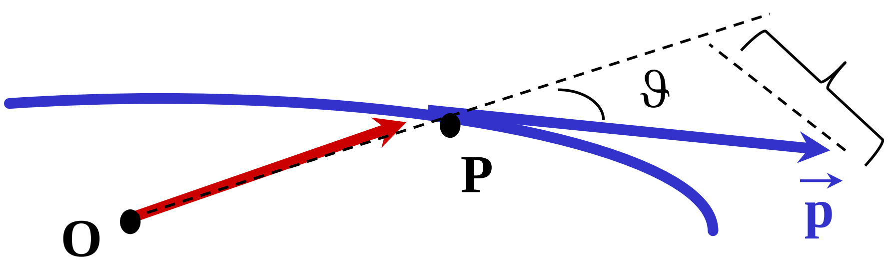
$$\boxed{\vec{L}_o \equiv \overrightarrow{OP} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$



Per le proprietà
del prodotto vettoriale:

$$\vec{L}_O \perp \vec{p}\ ,\ \vec{r}$$

$$L_O = mv\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\vartheta = rp\sin\vartheta = rp_\perp$$



$$p_\perp = p\sin\vartheta \longleftarrow$$

componente di **p** **perpendicolare** al raggio vettore **r**

Dimensioni di $\vec{L}$:

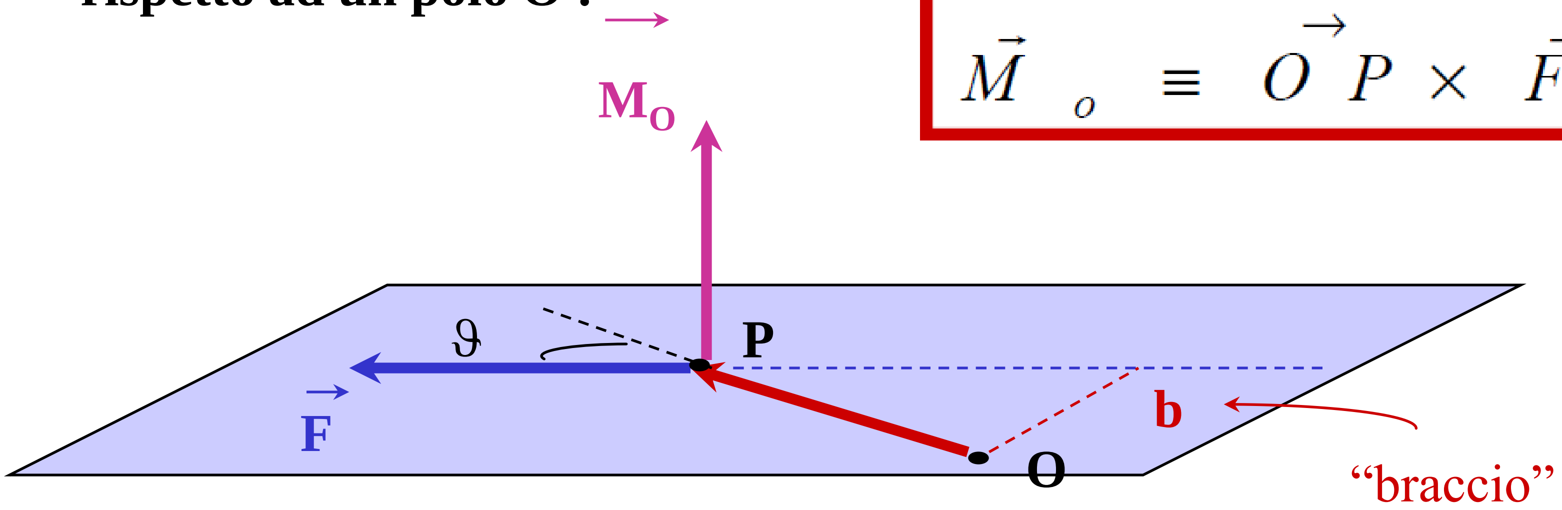
$$\left[\vec{L}\right] = Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = N \cdot m \cdot s$$

NOTA: se la traiettoria è circolare: $\vartheta=\pi/2$, $p_\perp=p$

Momento di una forza

"Momento" di una forza F, applicata in un punto P,
rispetto ad un polo O :

$$\boxed{\vec{M}_o \equiv \overrightarrow{OP} \times \vec{F}}$$



Per le proprietà
del prodotto vettoriale:

$$\vec{M}_o \perp \vec{F}, \overrightarrow{OP}$$

$$M_O = F\left|\overrightarrow{OP}\right|\sin\vartheta = Fb$$

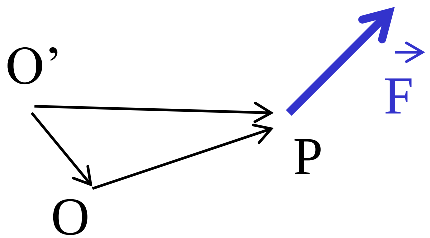
Dimensioni di $\vec{M}$:

$$\left[\vec{M}\right] \equiv N \cdot m = \left[\left[\frac{d\vec{L}}{dt}\right]\right]$$

Momento di una forza (II)

Cambiando il polo rispetto al quale si calcola il momento di una forza:

$$\vec{M}_{o'} \equiv \overrightarrow{O'P} \times \vec{F} = (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}) \times \vec{F} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} + \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$$

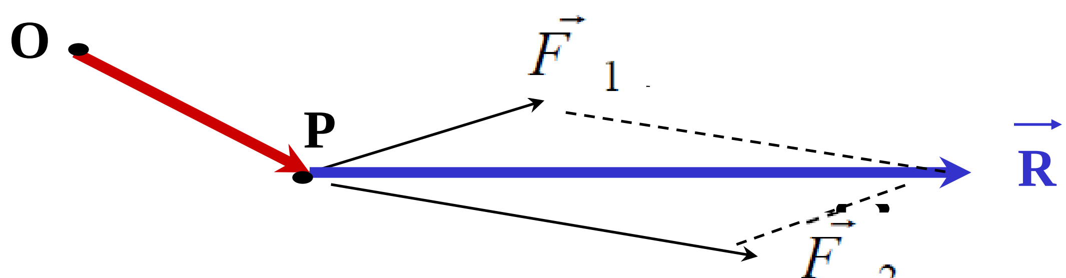


$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_{o'} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{F} + \vec{M}_o}$$

Analogamente,
per il momento angolare:

$$\boxed{\vec{L}_{o'} = \overrightarrow{O'O} \times m\vec{v} + \vec{L}_o}$$

Se si hanno più forze applicate in uno stesso punto P, il **momento risultante** dei singoli momenti **è uguale al momento della forza risultante** applicata in P **:**



$$\vec{M}_O^{tot} \equiv \sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\overrightarrow{OP} \times \vec{F}_i) = \overrightarrow{OP} \times \sum_i \vec{F}_i = \overrightarrow{OP} \times \vec{R}$$

Teorema del momento angolare

La **derivata rispetto al tempo del momento angolare**, calcolato rispetto ad un **polo fisso O in un sistema di riferimento inerziale**, di un punto materiale soggetto ad una forza $\vec{F}$ **è uguale al momento della forza** rispetto ad O **:**

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O}$$

Infatti:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \equiv \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \underbrace{\overbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}^{\equiv \vec{v}} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\,m\vec{v}}{dt}}_{\equiv \vec{F}}$$

(per la 2ª legge di Newton , se **v** è la velocità in un sistema di riferimento inerziale)

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{M}_O$$

Esempio: moto di un "pendolo semplice"

Con riferimento alla figura:

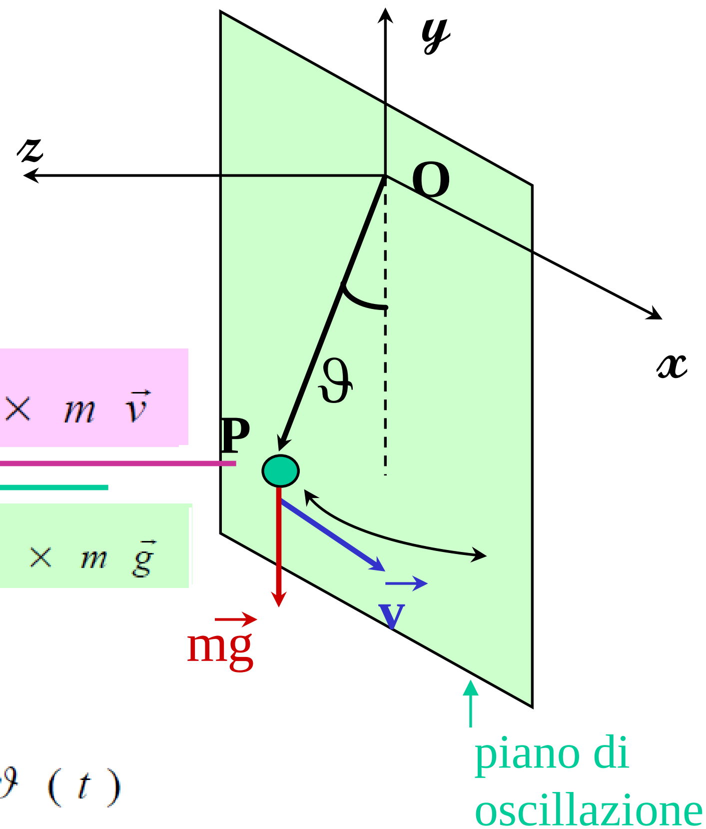
$$L_{Oz} = m\,\ell\,v = -m\ell^2 \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -\ell \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$M_{Oz} = m g \ell \sin\vartheta$$

$$\vec{L}_o \equiv \vec{OP} \times m\vec{v}$$

$$\vec{M}_o \equiv \vec{OP} \times m\vec{g}$$



Dal teorema del momento angolare, proiettato lungo l' asse z:

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz}$$

$$\Rightarrow \quad -m\ell^2 \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = m g \ell \sin\vartheta(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\vartheta(t)}$$

equazione del pendolo semplice (gia' nota dalla legge di Newton)

(si ricordi che per piccole oscillazioni: $\sin\vartheta(t) \cong \vartheta(t)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\vartheta(t) = -\omega^2\vartheta(t)$$

Teorema del momento dell'impulso

Integrando rispetto al tempo l'equazione che esprime il teorema del momento angolare, si ha:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{M}_O(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{L}_O(t)}{dt}\,dt = \int_{\vec{L}_i}^{\vec{L}_f} d\vec{L}_O = \Delta\vec{L}_O$$

In particolare, se il momento $\vec{M}_O(t) \equiv \vec{r}(t) \times \vec{F}(t)$
è applicato per un tempo sufficientemente breve affinchè il punto di applicazione di $\vec{F}(t)$ possa essere considerato costante : $\vec{r}(t) = \vec{r}_O$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{M}_O(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_f} [\vec{r}_O \times \vec{F}(t)]\,dt = \vec{r}_O \times \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt}_{\equiv \vec{J}} = \Delta\vec{L}_O$$

$\equiv \vec{J}$ → impulso della forza F

⇨ $$\boxed{\underbrace{\vec{r}_O \times \vec{J}}_{\text{“momento dell'impulso”}} = \Delta\vec{L}_O}$$

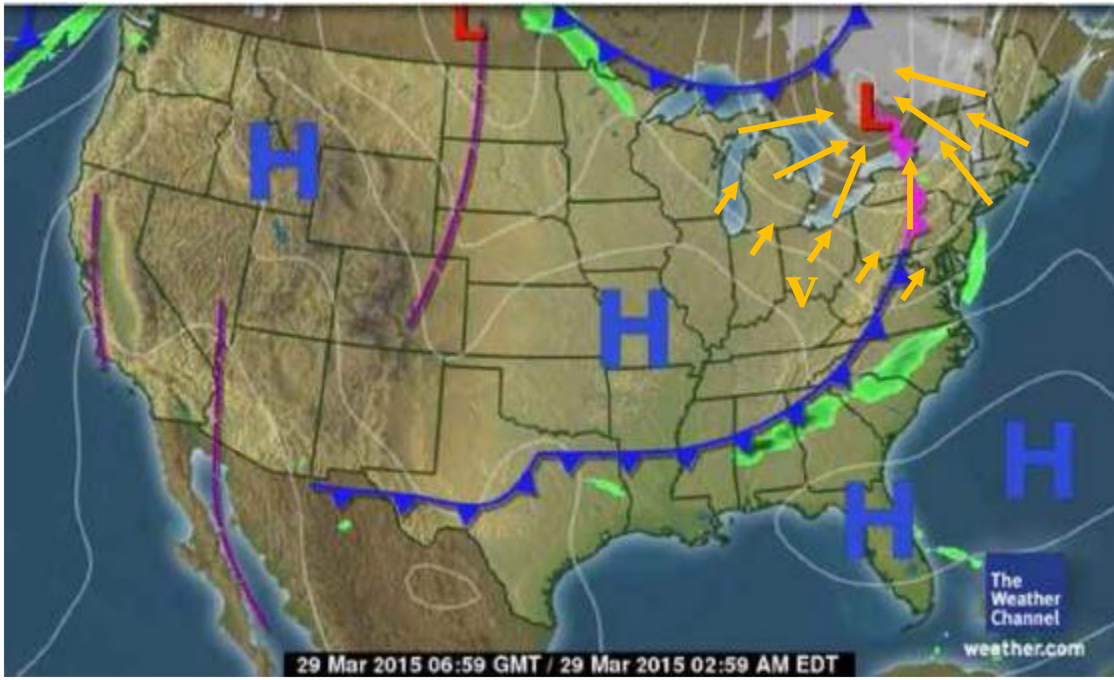
"teorema del momento dell'impulso"

"momento dell'impulso"

Campo vettoriale

Un “**campo vettoriale**” è definito quando in ogni punto dello spazio è dato un vettore (che , in generale, rappresenta una data grandezza fisica vettoriale)

Esempi:



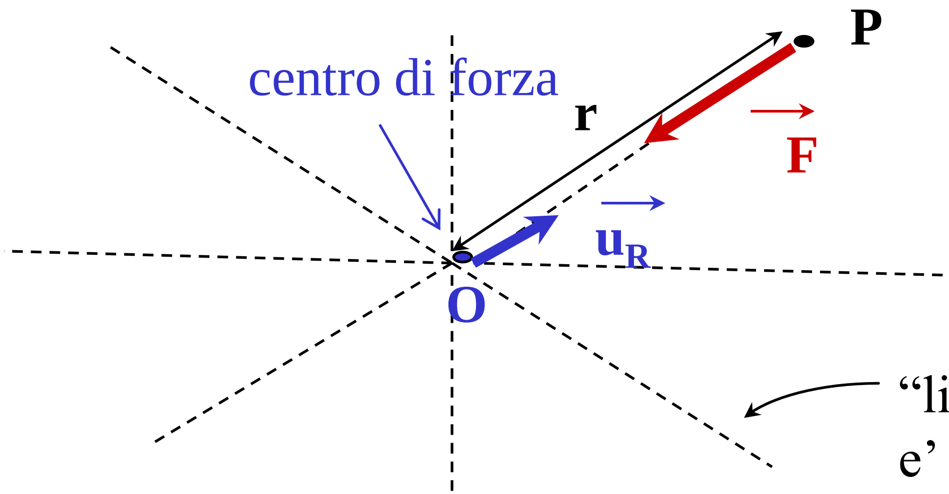
- il campo vettoriale della velocità **v** di un fluido

- il campo vettoriale della forza gravitazionale agente su un pianeta ad opera del Sole

- il campo vettoriale della forza elettrica agente su una carica elettrica in una data regione di spazio (ad es., tra le armature di un condensatore)

Campo di forza centrale

In ogni punto dello spazio il vettore forza $\vec{F}(\vec{r})$ è diretto verso uno stesso **punto 0** dello spazio detto **"centro di forza"**, ed il suo modulo é funzione della sola distanza r dal centro di forza:



$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\vec{u}_R}$$

versore radiale

"linea di forza": linea che in ogni suo punto e' tangente alla forza $\vec{F}$

Esempio:
campo della **forza gravitazionale** generata da una massa $\mathcal{M}$ che agisce su una massa m a distanza r da $\mathcal{M}$:

$$\vec{F}(r) = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\,\vec{u}_R$$

$F(r)$

Campo di forza centrale (II)

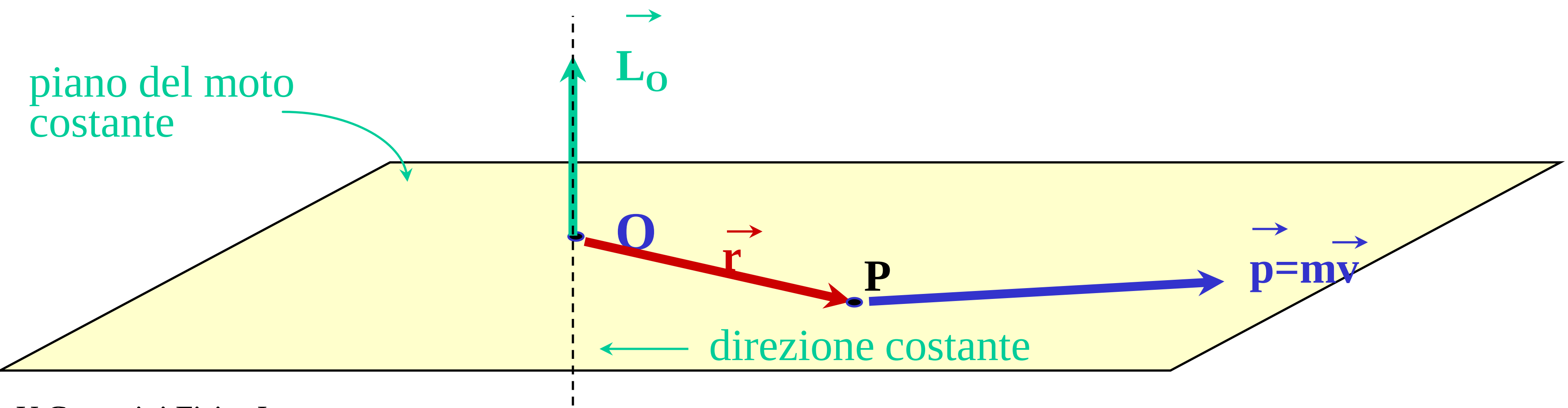
In un campo di forza centrale , il moto avviene **mantenendo costante il momento angolare** , calcolato rispetto al centro di forza:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \times F(r)\,\vec{u}_R = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_O = \text{costante}}$$

centro della forza

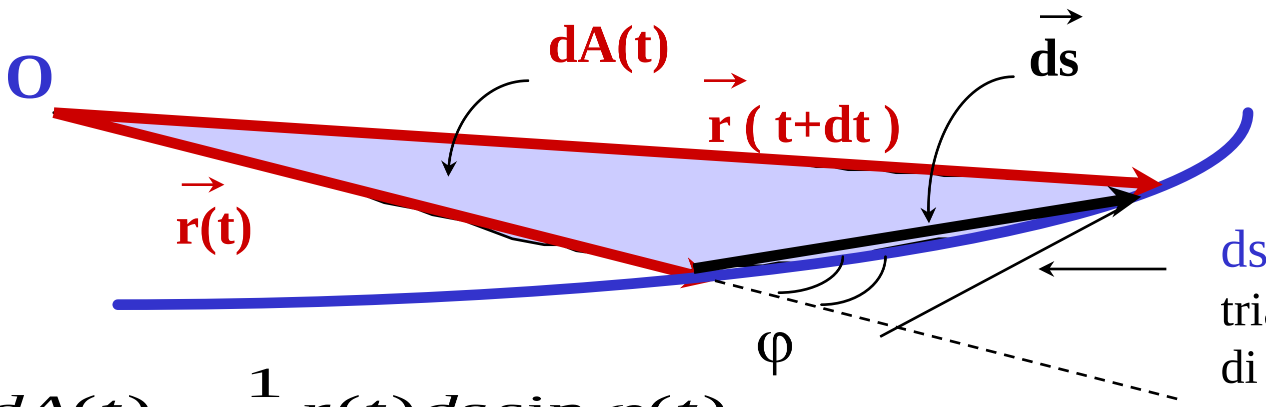
$\Rightarrow$ il piano individuato dai vettori $\vec{\mathbf{r}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ è sempre lo stesso, ossia **il moto avviene in un piano**



"Velocità areale"

La costanza del modulo di L implica che il moto avviene con **"velocità areale" costante :**

≡ derivata rispetto al tempo
dell'area **A(t)** "spazzata" dal vettore posizione **r(t)**



$$dA(t) = \frac{1}{2} r(t) ds \sin\varphi(t)$$

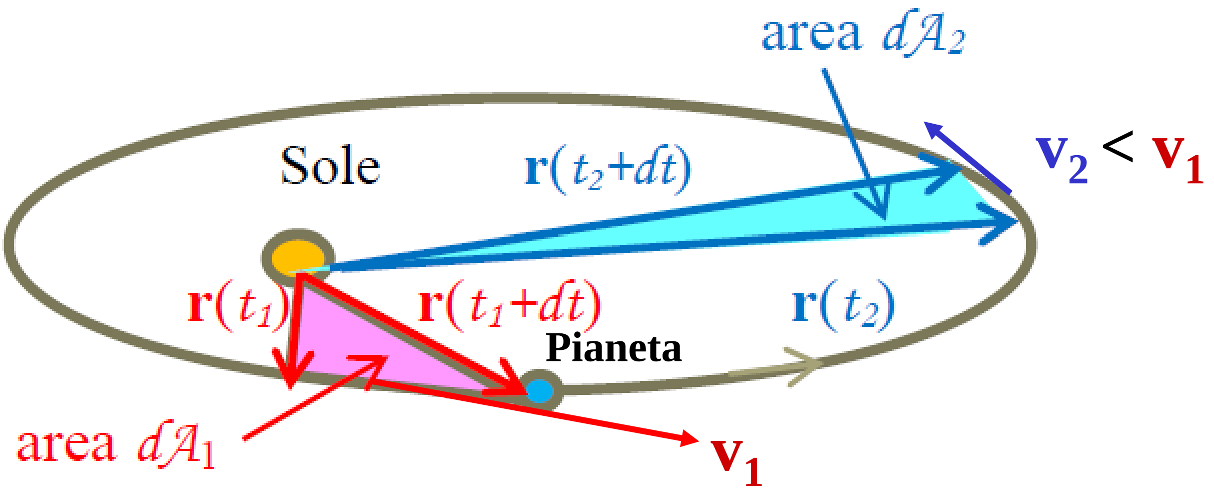
$$\Rightarrow \frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} r(t) \frac{ds}{dt} \sin\varphi(t) = \frac{1}{2} r v \sin\varphi$$

costante

Ricordando che: $L_O \equiv r(t) m v(t) \sin\varphi(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dA(t)}{dt} = \frac{L_O}{2m}}$

(questa è la **2ª legge di Keplero** per il moto dei pianeti nel campo della forza gravitazionale generata dal Sole)

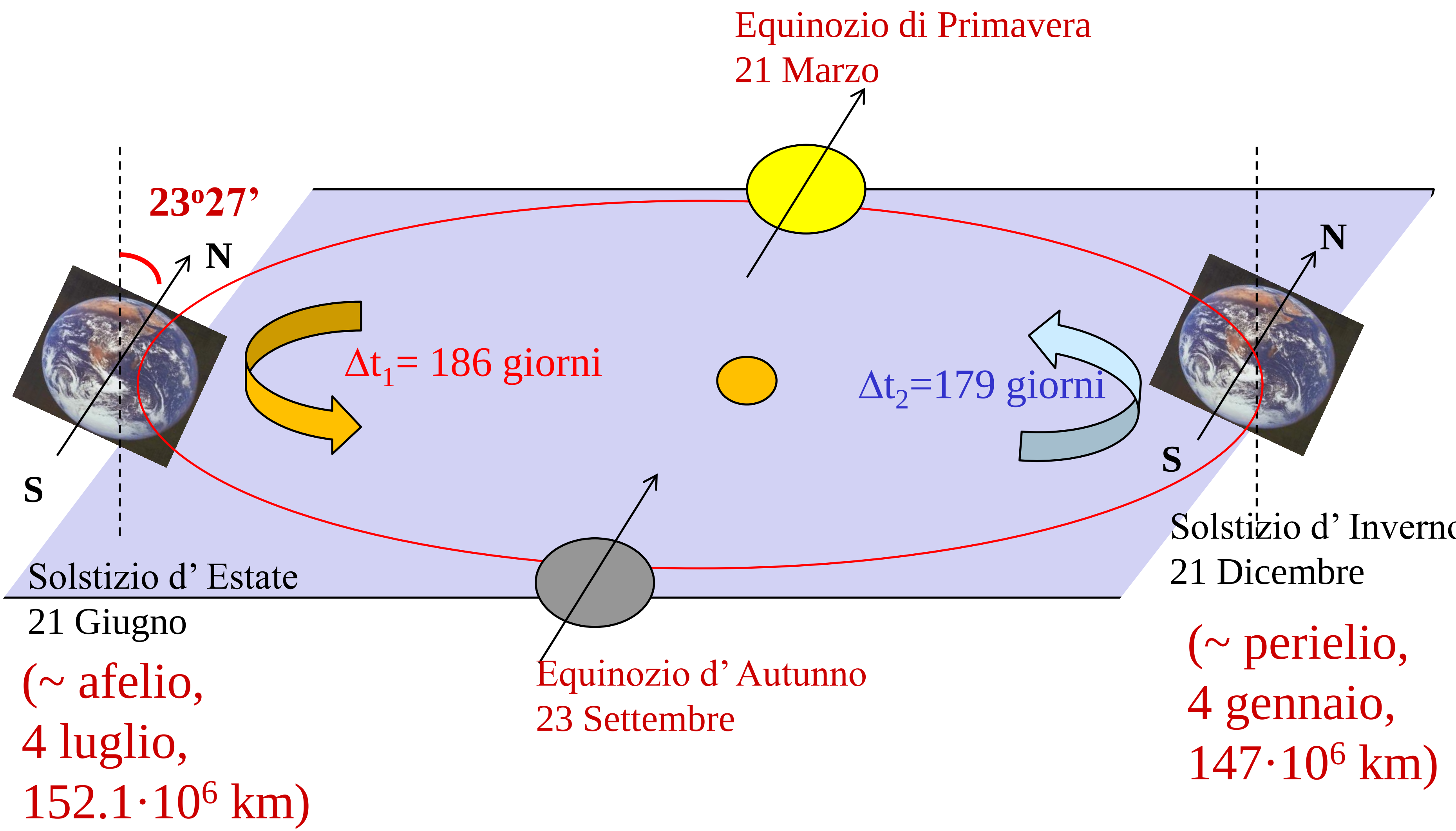
Velocità areale e 2ª legge di Keplero



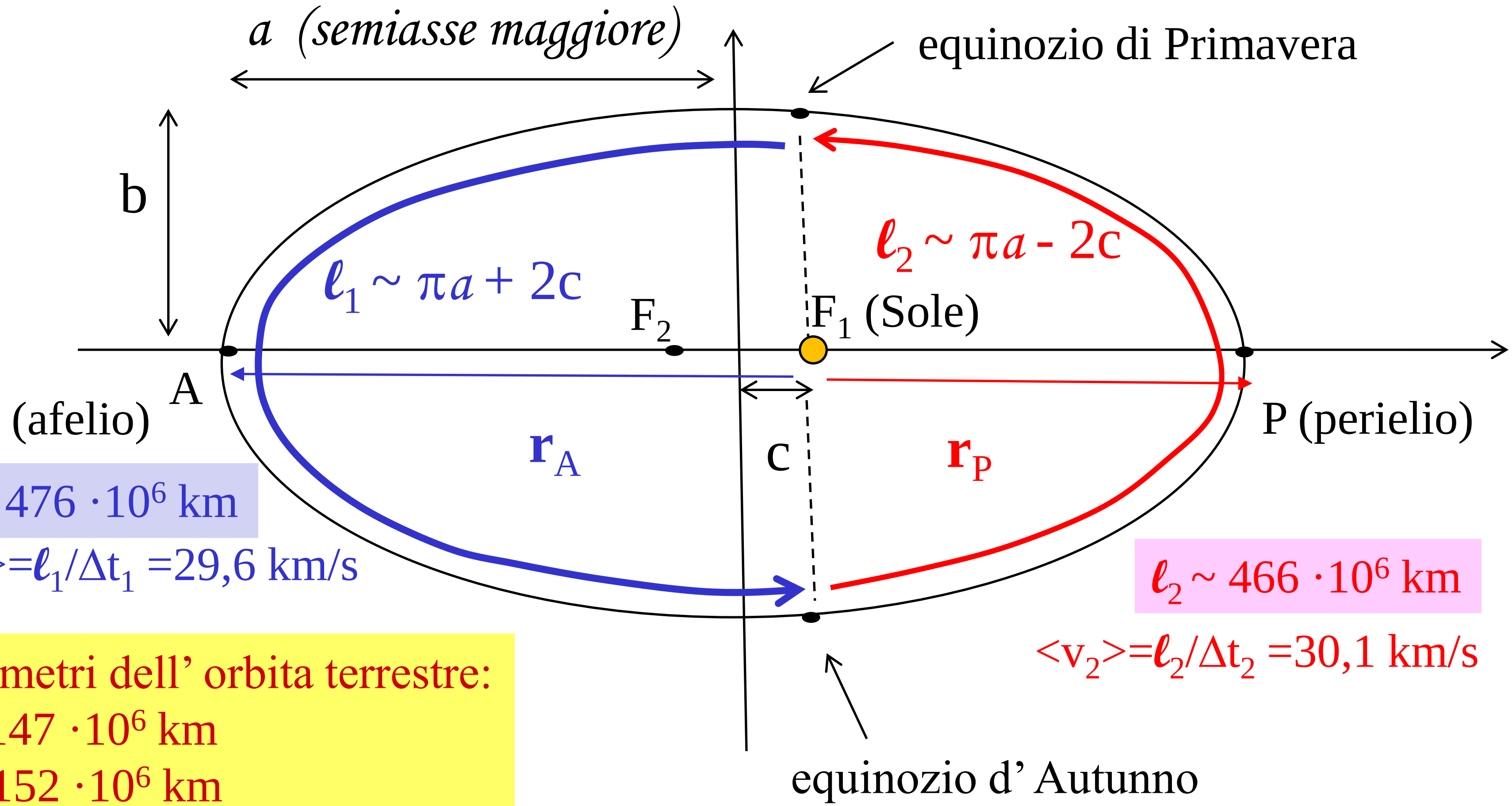
2ª legge di Keplero: Il moto dei pianeti avviene con velocità areale costante.

$$dA_1 = (1/2) r_1 v_1 \sin\phi_1 dt = dA_2 = (1/2) r_2 v_2 \sin\phi_2 dt$$

Moto di rivoluzione della Terra



Moto di rivoluzione della Terra (2)



$\ell_1 \sim 476 \cdot 10^6$ km

$\langle v_1 \rangle = \ell_1/\Delta t_1 = 29{,}6$ km/s

Perametri dell' orbita terrestre:

$r_P = 147 \cdot 10^6$ km

$r_A = 152 \cdot 10^6$ km

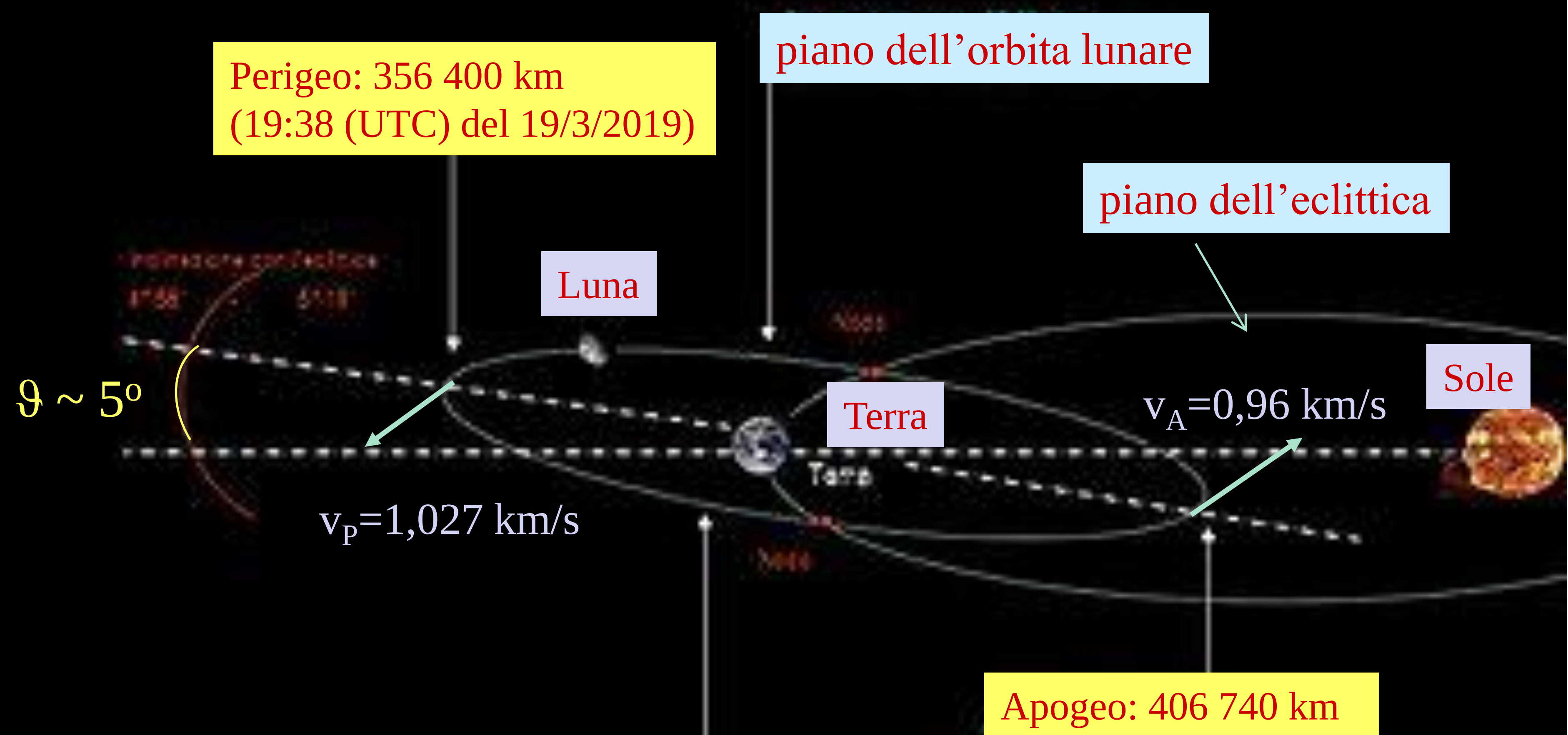
$c = 2.5 \cdot 10^6$ km

$a = (r_P + r_A)/2 = 149.5 \cdot 10^6$ km

Eccentricità $e \equiv c / a = 0.0167$

$\langle v_{Marzo \to Sett.} \rangle$ è minore di $\langle v_{Sett \to Marzo} \rangle$

Orbita lunare



Orbita lunare: ℓ~2 413 000 km;   eccentricità e ~0,06

Periodo di rivoluzione (mese siderale) T=27,32 giorni= 2.36 10^6 s

$\rightarrow$ $\langle v_{Luna} \rangle$ ~ 1,02 km/s

Accelerazione centripeta: $a_N \sim v^2/r = 1{,}04 \cdot 10^6/(3{,}8 \cdot 10^8)$ m/s^2 = 0.0027 m/s^2

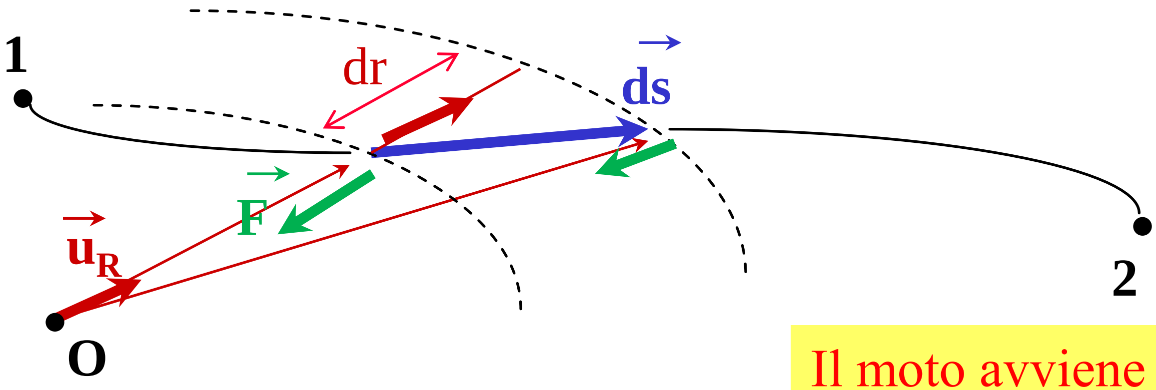
[Newton notò che: g/a_N = 9,8 /0.0027 = 3600 = r^2/R_T^2 = (384000 km /6400 km)^2 =60^2]

Campo di forza centrale (III)

Un **campo di forze centrali** è **conservativo:**

$$W_{12} \equiv \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int F(r)\underbrace{\vec{u}_R \cdot d\vec{s}}_{= dr} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = G(r_2) - G(r_1)$$

funzione primitiva di F(r)



il lavoro W_{12} non dipende dal cammino percorso

Il moto avviene conservando l' energia meccanica

Ad esempio, per il **campo di forza gravitazionale**:

$$F(r) = \frac{-\gamma Mm}{r^2}, \quad G(r) = \frac{\gamma Mm}{r} \Rightarrow W_{12} = \gamma Mm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

L' energia potenziale nel generico punto P a distanza r dal centro di forza e' data da:

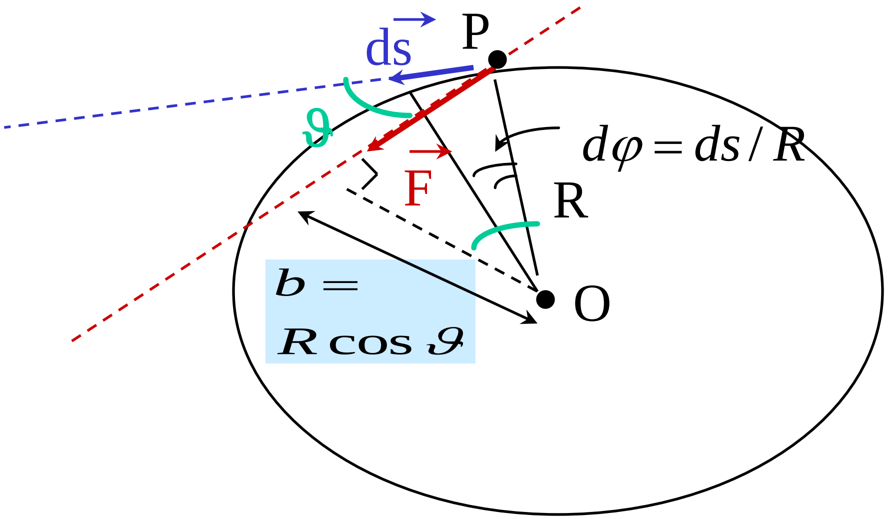
$$E_p(r) - E_p(r_1) \equiv -W_{1P} = \gamma mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \qquad \boxed{E_p(r) = -\gamma\frac{mM}{r} + C}$$

L' energia meccanica:

$$E_M \equiv E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2(r) - \gamma\frac{mM}{r}$$ e' costante.

Lavoro nei moti rotatori

In un moto circolare, il lavoro della forza può essere espresso come il prodotto del momento della forza rispetto al centro di rotazione O per l'angolo di rotazione del punto di applicazione:



$b = R\cos\vartheta$

$d\varphi = ds/R$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\vartheta\, ds = F\cos\vartheta R\, d\varphi$$

"braccio" b

$$= Fb\,d\varphi = M_O\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} M_O(\varphi)\,d\varphi}$$

In particolare, se il momento **M** è costante: $\boxed{W = M_O \Delta\varphi}$