

2.8 – Scattering Thomson

Un elettrone libero che viene investito da un'onda elettromagnetica accelera sotto l'effetto del campo elettrico e , di conseguenza, emette radiazione verso direzioni anche diverse dalla direzione dell'onda incidente. Se la frequenza ν dell'onda è tale che $h\nu \ll m_e c^2$, il processo di diffusione può essere esaminato da un punto di vista classico. Immaginiamo per semplicità che l'onda sia piana e monocromatica, di frequenza $\omega = 2\pi\nu$, e che la carica, costretta ad oscillare con la medesima frequenza, subisca uno spostamento molto più piccolo della lunghezza d'onda $\lambda = c/\omega$. La potenza emessa è ricavabile dalla formula di Larmor assumendo che l'accelerazione sia provocata dalla forza elettrica

$$\mathbf{F} = e \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) .$$

Poichè l'accelerazione quadratica media è $e^2 \mathcal{E}_0^2 / 2$, applicando le (2.1.8) e (2.1.9) si trovano rispettivamente la potenza media per unità di angolo solido e la potenza totale

$$\left\langle \frac{d^2 E}{dt d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4 \mathcal{E}_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \sin^2 \chi , \quad (2.8.1)$$

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{e^4 \mathcal{E}_0^2}{3 m_e^2 c^3} , \quad (2.8.2)$$

dove χ è l'angolo formato dalla direzione di polarizzazione \mathcal{E}_0 (e quindi dell'accelerazione $\dot{\mathbf{v}}$) e la direzione di osservazione \mathbf{n} (Figura 2.15).

Nei processi di diffusione viene generalmente introdotto il concetto di *sezione d'urto*, definita come rapporto tra la potenza diffusa e il flusso incidente. In particolare, la sezione d'urto differenziale per la radiazione che viene diffusa entro l'angolo solido $d\Omega_1$, è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \left[\frac{\text{Potenza diffusa/angolo solido}}{\text{Potenza incidente/unità di area}} \right] .$$

Poichè nel nostro caso il flusso dell'onda piana polarizzata[†] è $c \mathcal{E}_0^2 / 8\pi$ (eguale, cioè, alla media nel tempo del corrispondente vettore di Poynting), si ha

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_1} \right)_{pol} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \chi = r_o^2 \sin^2 \chi . \quad (2.8.3)$$

[†] Per convenzione, la direzione di polarizzazione di un'onda elettromagnetica è fissata dalla direzione del campo elettrico.

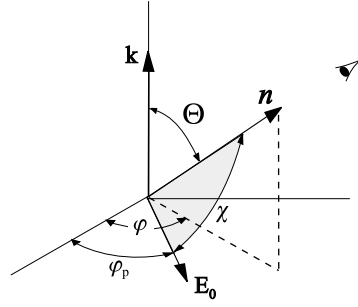


Figura 2.15 Geometria dello scattering Thomson.

Si noti come la dimensione naturale associata alla sezione d'urto sia proprio il raggio classico dell'eletttrone $r_o = e^2/m_e c^2$. Se l'onda incidente è diretta lungo l'asse z , indicando con φ_p l'angolo tra la direzione di polarizzazione e l'asse x e con Θ l'angolo polare (Figura 2.15), vale la relazione

$$\cos \chi = \sin \Theta \cos(\varphi - \varphi_p) . \quad (2.8.4)$$

La (2.8.3) mette in evidenza la dipendenza della diffusione dallo stato di polarizzazione. In particolare, la radiazione che viene diffusa nella stessa direzione dell'onda incidente ($\theta = 0$) è indipendente dall'angolo di polarizzazione, mentre la radiazione diffusa in direzione ortogonale ($\Theta = \pi/2$) ha la massima intensità quando $\varphi_p = \varphi + \pi/2$, ed è nulla per $\varphi_p = \varphi$ (polarizzazione completa).

Per ricavare l'espressione della sezione d'urto relativa alla radiazione non polarizzata che si propaga nella direzione dell'asse z , occorre mediare la (2.8.3) su tutti gli angoli φ_p , cioè

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{r_o^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \Theta \cos^2(\varphi - \varphi_p)] d\varphi_p = \frac{r_o^2}{2} (1 + \cos^2 \Theta) \quad (2.8.5)$$

Mediando nuovamente su tutte le direzioni di diffusione, si ha

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_o^2 = 0.665 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (2.8.6)$$

Le (2.8.5) e (2.8.6) vengono chiamate **sezioni d'urto Thomson**, rispettivamente differenziale e totale.

Come si può notare, le sezioni d'urto Thomson sono indipendenti dalla frequenza. Tuttavia, questa importante proprietà è valida solamente nel limite classico, ed inoltre solo se l'elettrone è libero. Quando $h\nu_0 \gtrsim m_e c^2$ gli effetti quantistici provocano un sensibile abbassamento della sezione d'urto differenziale. Di conseguenza anche la sezione totale diventa sempre più piccola via via che aumenta l'energia del fotone incidente (v. il paragrafo 4.8). Poiché $m_e c^2 = 511 \text{ KeV}$, la deviazione dalla formula classica avviene già nella banda ultravioletta estrema, ma diventa importante solo nella regione X.

Un effetto diverso, ma che porta anch'esso ad una dipendenza della sezione d'urto dalla frequenza, è dovuto alla presenza di elettroni legati a sistemi atomici. Possiamo idealizzare tale situazione immaginando che l'elettrone formi un oscillatore armonico di frequenza propria $\nu_0 = 2\pi\omega_0$. In queste ipotesi, se l'elettrone è imperturbato, la sua equazione del moto è data da $\ddot{r} = -\omega_0^2 r$. Seguendo il medesimo procedimento usato per ricavare la sezione d'urto Thomson, supponiamo che un'onda elettromagnetica di frequenza ν investa il sistema, che viene così sottoposto all'azione di un campo elettrico $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(2\pi\nu t)$. Il moto dell'elettrone diventa *forzato* e, se trascuriamo i termini legati alla reazione della radiazione, soddisfa all'equazione $m_e \ddot{r} + m_e \omega_0^2 r - e \mathcal{E}_0 \cos(2\pi\nu t) = 0$, la cui soluzione è

$$r(t) = \frac{e \mathcal{E}_0}{m_e |\omega_0^2 - \omega^2|} \sin(\omega t - \pi/2)$$

Usando la formula classica di Larmor mediata nel tempo, si trova la sezione d'urto

$$\sigma = \frac{\sigma_T}{[1 - (\nu_0/\nu)^2]^2}$$

Nel limite $\nu \gg \nu_0$ (energia della radiazione incidente molto maggiore dell'energia di legame) l'espressione si avvicina all'usuale formula di Thomson. Quando invece $\nu \ll \nu_0$ (lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu$ molto maggiore delle dimensioni dell'atomo) σ tende verso la *sezione d'urto di Rayleigh*:

$$\sigma \rightarrow \sigma_R = \sigma_T (\lambda_0/\lambda)^4 .$$

In realtà l'effetto è importante solo nei fluidi relativamente freddi ($T \ll 10^3 \text{ K}$). In particolare la dipendenza della diffusione dalla quarta potenza della lunghezza d'onda è responsabile del colore azzurro della luce diurna e del colore rosso che caratterizza l'alba e il tramonto del sole (la radiazione blu viene maggiormente diffusa rispetto a quella rossa).

Osserviamo infine che, sebbene l'analisi dello scattering Thomson sia stata fatta assumendo che la carica accelerata sia un elettrone, le medesime formule delle sezioni d'urto rimangono valide anche quando la diffusione coinvolge una carica più pesante, purchè si sostituisca la massa elettronica m_e con la massa della nuova particella. Nel caso dei protoni, per i quali $m_p c^2 = 1837 m_e c^2 \approx 1 \text{ BeV}$, la sezione d'urto è circa 4×10^6 volte più piccola di quella degli elettroni. Inoltre, a causa delle interazioni forti con i mesoni π gli effetti quantistici si fanno sentire già ad energie $\approx 100 \text{ MeV}$ [†].

2.9 – Effetto Tchérénkov

Una carica che si muove con velocità rettilinea ed uniforme non irradia. Infatti, nella regione attorno alla carica il campo elettrico è formato solo dal primo termine dell'equazione (2.1.4), il quale tende rapidamente a zero a grandi distanze. Tuttavia, una la carica che si muove in un mezzo dispersivo può emettere radiazione elettromagnetica *Tchérénkov* se la sua velocità supera la velocità di fase della luce del mezzo. A rigore, l'emissione non è diretta, essendo il risultato dell'azione collettiva degli atomi del mezzo attraversato, i cui elettroni esterni vengono accelerati dalle forze esercitate dalla carica in moto. Nonostante ciò le caratteristiche principali del processo possono essere analizzate anche con l'approccio fenomenologico dell'elettrodinamica classica. Diversamente dal caso del moto della particella singola nel vuoto, è ora necessario ricorrere al concetto di *costante dielettrica* ϵ . In ogni caso, molte delle espressioni ricavate in precedenza sono ancora utilizzabili purchè si sostituisca la velocità della luce c con $c/\sqrt{\epsilon}$, e la carica e con $e/\sqrt{\epsilon}$. Tuttavia manteniamo per il momento i medesimi simboli, senza esplicitare la costante dielettrica, ma assumiamo nello stesso tempo che la velocità della carica $\beta = \mathbf{v}/c$ possa essere maggiore di 1.

Per comprendere quale sia la maggiore differenza tra la configurazione del campo elettromagnetico quando $v < c$ e quella che si presenta quando il moto è "superluminale" possiamo fare riferimento alla Figura 2.16. Immaginiamo che la carica emetta una successione di onde sferiche che si propagano con velocità c . Come si può notare, nel disegno a sinistra (che corrisponde alla situazione esaminata nel §2.1) ogni punto dello spazio riceve informazioni dalla

[†] Rispetto all'elettrone, un protone presenta una struttura molto più complessa, che ne provoca una diminuzione della sezione d'urto proprio in corrispondenza all'energia di massa dei mesoni (140 MeV).

carica che si trova nella posizione fissata dal tempo ritardato $t' = t - R/c$.

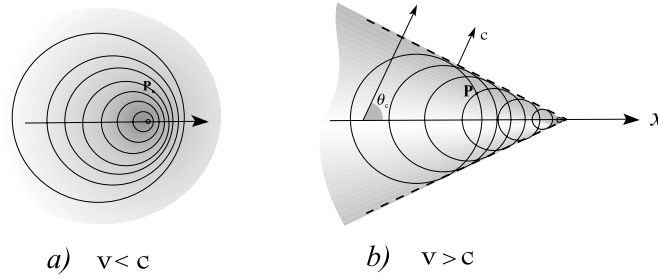


Figura 2.16 Radiazione Tchérénkov.

Quando invece $v > c$ (figura *b*), in tutti i punti esterni all'area ombreggiata il campo elettrico è nullo, poichè non sono stati ancora raggiunti dal segnale inviato dalla carica, mentre i punti interni ricevono il segnale. Ma il fatto più rilevante del moto superluminale è che nella regione interna coesistono *due* posizioni ritardate dell'elettrone, in maniera tale che i relativi segnali contribuiscono costruttivamente a formare il campo elettrico \mathbf{E} . In un punto \mathcal{P} , distante \mathbf{r} dalla posizione dell'elettrone nell'istante t , i corrispondenti istanti ritardati t'_{\pm} sono soluzione dell'equazione vettoriale (v. Figura 2.17)

$$\boldsymbol{\beta}R + \mathbf{r} = \mathbf{n}R, \quad (2.9.1)$$

o, in forma scalare,

$$\beta^2 R^2 + r^2 + 2\beta Rr \cos \alpha = R^2, \quad (2.9.2)$$

dove α è l'angolo tra la direzione della velocità $\boldsymbol{\beta}$ e \mathbf{r} . Le soluzioni dell'equazione sono

$$\frac{R_{\pm}}{r} = \frac{-\beta \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha}}{1 - \beta^2} \quad (R > 0). \quad (2.9.3)$$

Se $\beta < 1$ (come accade nel vuoto) il termine sotto radice è sempre positivo, ed esiste sempre un'unica soluzione positiva fisicamente ammissibile. Al contrario, quando $\beta > 1$, il radicando è positivo solo se $\sin \alpha < 1/\beta$. In questo caso le soluzioni ammissibili sono due purchè si abbia contemporaneamente $\cos \alpha < 0$. La regione con doppia soluzione è delimitata dalla superficie

$\sin \alpha_c = 1/\beta$ (con $\alpha_c > \pi/2$) e definisce il *cono di Tchérénkov*. Il bordo del cono, inclinato di un'angolo $\theta_c = \alpha - \pi/2$ rispetto alla direzione del moto dell'elettrone, si propaga con la velocità della luce nel vuoto via via che la carica si muove nella direzione dell'asse x .

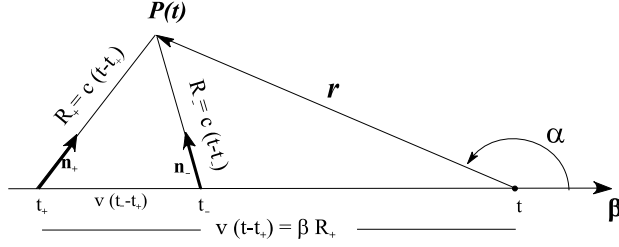


Figura 2.17 Tempi ritardati in un moto superluminale di una carica.

Nei punti interni il campo elettrico è dato dalla somma

$$\mathcal{E} = e(1 - \beta^2) \left[\left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa^3 R^2} \right)_+ + \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa^3 R^2} \right)_- \right], \quad (2.9.4)$$

con

$$\kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 - \beta \sin \alpha.$$

Le linee di forza sono radiali, e puntano nella direzione della posizione attuale della carica. Trattandosi di un campo di natura essenzialmente coulombiana, all'interno di questa regione non vi è alcun trasporto di energia. Tuttavia poichè κ si annulla proprio corrispondenza all'angolo α_c , il campo elettrico diverge sulla superficie del cono di Tchérénkov. Attraverso questa superficie singolare avviene dunque una brusca transizione del campo elettrico da \mathcal{E} verso il valore esterno nullo. Il fronte si propaga con la velocità della luce, formando una sorta d'onda d'urto elettromagnetica che è all'origine del caratteristico segnale impulsivo quando investe un apparato ricevente.

Un'analisi spettrale mostra che la potenza emessa da una singola carica che attraversa con velocità costante uno strato materiale di spessore ℓ è

$$\frac{d^2 E}{dt d\nu} = \frac{4\pi^2 e^2 \nu}{c^2} [1 - (\beta^2 \epsilon)^{-1}] \ell \quad (\beta^2 > \epsilon^{-1}), \quad (2.9.5)$$

dove ora si è esplicitata la forma corretta della velocità ($\beta \rightarrow \beta\sqrt{\epsilon}$).

La divergenza che si manifesta sul cono di Tchérénkov, e che riguarda sia l'intensità del campo (equazione 2.9.4) sia l'energia totale emessa (integrale sulla frequenza dell'equazione 2.9.5), è solo apparente, e dipende dall'ipotesi che la "costante" dielettrica sia effettivamente costante. In realtà, il valore di ϵ di tutte le sostanze varia con la frequenza della radiazione, ed ha il tipico andamento illustrato schematicamente nella Figura 2.18. Alle basse frequenze ϵ è molto prossimo all'unità, ma cresce poi con ν soprattutto in prossimità della frequenza ν_0 , oltre la quale si ha il fenomeno della dispersione anomala. Ciò significa che la scia tracciata dalla carica è formata da una distribuzione continua di coni di Tchérénkov aventi angoli di apertura leggermente diversi tra loro e frequenze distribuite in uno stretto intervallo tali da soddisfare la relazione $\epsilon(\nu) > \beta^{-2}$. Proprio questa proprietà viene alle volte utilizzata per calcolare la velocità delle particelle molto veloci, come i raggi cosmici. Come mostra la Figura 2.18, nota funzione $\epsilon(\nu)$ del gas attraversato, la misura del limite inferiore ν_L della banda di frequenze emesse dalla carica permette di risalire alla velocità $\beta = 1/\sqrt{\epsilon_L}$ anche quando questa è molto prossima ad 1.

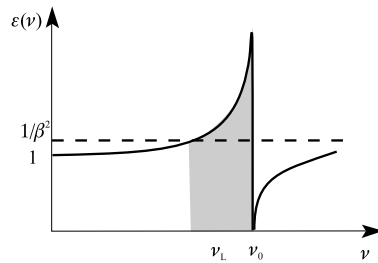


Figura 2.18 Andamento qualitativo della costante dielettrica di un gas poco assorbente (curva continua). La radiazione Tchérénkov viene emessa solo in una ristretta banda di frequenze (area ombreggiata).