

# CAPITOLO III

## PROPRIETA' STATISTICHE DEI FOTONI

### 3.1 – Introduzione

I processi di emissione da cariche elettriche accelerate affrontati nel capitolo precedente presuppongono una conoscenza di base che deriva principalmente dall'elettrodinamica classica. La stessa teoria del trasporto radiativo, che esamineremo più avanti, privilegia l'aspetto non quantistico della propagazione delle onde elettromagnetiche. Tuttavia nell'astrofisica delle alte energie si incontrano sempre più spesso processi che possono essere descritti correttamente solo ricorrendo ad un approccio quantistico, altri ancora non sono addirittura previsti dalla fisica classica. Il confine tra le due visuali è determinato dal rapporto tra la lunghezza d'onda Compton  $\lambda_c = h/mc$  delle particelle elementari e la lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu$  della radiazione. Quando  $\lambda$  diventa confrontabile con  $\lambda_c$  è necessario sostituire il concetto di campo elettromagnetico continuo con quello di "gas di fotoni", il cui comportamento è simile, per taluni aspetti, a quello dei fluidi materiali. In questo modo le interazioni tra materia e radiazione non sono più mediate dal campo elettrico ma vengono considerate come azioni dirette dei fotoni sulle cariche. Se vi è sufficiente rarefazione, l'interazione può essere trattata come la semplice somma di processi indipendenti, ciascuno dei quali coinvolge uno scambio diretto di energia e momento tra poche particelle. Tuttavia, quando le densità numeriche sono molto elevate, occorre includere nell'analisi anche gli effetti collettivi provocati dalle proprietà quanto-statistiche dei costituenti fondamentali della materia e della radiazione. In questo capitolo daremo alcune delle definizioni più rilevanti della meccanica statistica dei quanti e, senza entrare in eccessivi dettagli, discuteremo un certo numero di proprietà che sono indispensabili per una migliore e più completa comprensione della teoria del trasporto radiativo.

### 3.2 – Funzione di distribuzione dei fermioni

Il modo con cui le particelle sono distribuite in direzione e in energia viene descritto più efficacemente dal *numero di occupazione*  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ . Questa grandezza fissa il numero medio di particelle che, in un certo istante, sono contenuti in una celletta di volume  $h^3$  dello spazio delle fasi  $\mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ . La densità degli stati (numero di particelle di spin  $s$  nell'unità di volume in  $\mathcal{F}$ ) è

$$\frac{d^6 \mathcal{N}}{d^3 x d^3 p} = \frac{2s+1}{h^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (3.2.1)$$

Il fattore  $g = 2s + 1$  tiene conto dei possibili stati di polarizzazione. Nel seguito porremo  $g = 2$  poichè la nostra analisi sarà limitata al comportamento di un gas formato essenzialmente da elettroni e protoni, per i quali  $s = 1/2$ .

Il numero di occupazione  $f$  non deve superare uno per non violare il *Principio di Pauli*. Indicando con  $d\Omega$  l'angolo solido elementare centrato nella direzione di propagazione  $\mathbf{u}$  della particella, l'elemento di volume elementare nello spazio delle fasi è

$$d^3 x d^3 p = dV p^2 dp d\Omega .$$

Pertanto, nello spazio fisico la densità differenziale dei fermioni che si propagano all'interno dell'angolo solido  $d\Omega$ , con energia nell'intervallo  $dE$ , è data da

$$d^2 n = \frac{2}{h^3} f(\mathbf{p}) p^2 dp d\Omega = \frac{2m^3 c^3}{h^3} f(\mathbf{p}) \gamma^2 \beta d\gamma d\Omega , \quad (3.2.2)$$

nella quale, per semplicità, si è omessa la (eventuale) dipendenza di  $f$  dalle coordinate spazio-temporali  $x^i = [ct, \mathbf{x}]$ , e si è posto

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \gamma m c^2 \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{p} = \gamma \boldsymbol{\beta} m c . \quad (3.2.4)$$

Se la distribuzione è isotropa, integrando la (3.2.2) sulla sfera unitaria si ottiene la *funzione di distribuzione* delle particelle

$$dn = \frac{8\pi}{h^3} f(p) p^2 dp = 8\pi \left(\frac{m c}{h}\right)^3 f(p) \gamma^2 \beta d\gamma . \quad (3.2.5)$$

In un fluido in equilibrio termodinamico il numero di occupazione, oltre ad

essere isotropo, prende la forma semplice <sup>†</sup>

$$f(p) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} \quad (3.2.6)$$

in cui il potenziale chimico  $\mu$  è fissato implicitamente dalla densità numerica di particelle tramite la relazione

$$n = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}. \quad (3.2.7)$$

Quando la densità è molto elevata, il potenziale chimico è positivo e molto grande. In questo caso  $f(p)$  ha la forma della funzione a gradino (*funzione di Heaviside*), con tutti gli stati di energia  $E < \mu$  occupati e i rimanenti vuoti. Questa configurazione viene usualmente indicata col termine *degenerazione fermionica*. In astrofisica si incontra materia allo stato degenere all'interno delle stelle compatte (nane bianche e stelle di neutroni).

Nel caso opposto (gas molto rarefatti e caldi) il potenziale chimico è fortemente negativo, tanto da poter trascurare 1 nel denominatore della (3.2.6) per tutti i valori dell'energia. Con questa semplificazione, e introducendo la temperatura adimensionale  $\Theta = kT/mc^2$ , la densità diventa

$$n = \frac{8\pi}{h^3} e^{\mu/kT} \int_0^\infty p^2 e^{-E/kT} dp = 8\pi \left(\frac{mc^2}{h}\right)^3 e^{\mu/kT} \Theta K_2(1/\Theta) \quad (3.2.8)$$

dove  $K_2$  è la funzione di Bessel modificata di seconda specie di ordine  $2^{\frac{1}{2}}$ .

<sup>†</sup> I tempi caratteristici delle interazioni coulombiane sono molto brevi e, se il gas non è eccessivamente rarefatto, le particelle si portano rapidamente verso l'equilibrio termico caratterizzato da una temperatura  $T$ . Si tenga tuttavia presente che i tempi di rilassamento degli elettroni è diverso da quello degli ioni ed inoltre gli elettroni perdono più facilmente energia per irraggiamento rispetto alle particelle più massive. Di conseguenza in talune situazioni le temperature delle due specie possono differire molto tra loro (v. § 3.8).

<sup>‡</sup> Le funzioni di Bessel modificate di seconda specie di ordine  $n$  hanno la rappresentazione integrale

$$K_n(z) = \frac{z^n \sqrt{\pi/2}}{2^n \Gamma(n+1/2)} \int_0^\infty e^{-zt} (t^2 - 1)^{n-1/2} dt$$

i cui limiti asintotici sono  $K_0(z) \rightarrow -\ln(z)$  ( $z \rightarrow 0$ ) e

$$K_n(z) = \begin{cases} 2^{n-1} (n-1)! z^{-n} & z \rightarrow 0, \quad n \geq 1 \\ \sqrt{\pi/2z} \exp(-z) & z \rightarrow \infty \end{cases}$$

(Abramowitz, M e Stegun, I.A. *Handbook of Mathematical Functions*, 1968, Dover Publications, New York).

Assumendo dunque  $|\mu| \gg 1$  e  $f = \exp(-E + \mu)/kT$ , ed usando la (3.2.8) per eliminare il potenziale chimico dalla funzione di distribuzione all'equilibrio (3.2.6), si ottiene

$$dn(\gamma) = n \frac{\gamma^2 \beta e^{-\gamma/\Theta}}{\Theta K_2(1/\Theta)} d\gamma . \quad (3.2.9)$$

Questa equazione è nota come *distribuzione di Maxwell-Boltzmann relativistica*. Nel limite  $\Theta \ll 1$ , essa si riduce alla ben nota forma non relativistica

$$dn(v) = n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv , \quad (3.2.10)$$

ricavabile ponendo  $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}m\beta^2$  ed usando i limiti asintotici delle funzioni di Bessel.

### 3.3 – Funzione di distribuzione dei fotoni

Come per le particelle, anche la densità degli stati dei fotoni viene scritta nella forma

$$\frac{d^2\mathcal{N}}{d^3x d^3p} = \frac{2}{h^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) ,$$

dove, nuovamente, il fattore 2 tiene conto dei due possibili stati di polarizzazione. La densità differenziale dei fotoni che si propagano all'interno dell'angolo solido  $d\Omega$  centrato nella direzione spaziale  $\mathbf{k}$ , che hanno momento  $p^i = [p/c, \mathbf{p}] = h\nu/c[1, \mathbf{k}]$  ed energia nell'intervallo  $h d\nu$ , è data da

$$d^2n_\nu = \frac{2}{h^3} f(\mathbf{p}) p^2 dp d\Omega = \frac{2}{c^3} f(\mathbf{k}, \nu) \nu^2 d\nu d\Omega \quad (3.3.1)$$

(si è omessa ancora la dipendenza dalle coordinate  $x^i$ ). Diversamente dai fermioni, il numero di occupazione dei bosoni *non* è limitato superiormente poichè più particelle possono occupare il medesimo stato. Inoltre si tenga presente che i fotoni si muovono nello spazio delle fasi lungo ipersuperfici che soddisfano alla condizione  $p_i p^i = 0$ .

Integrando la (3.3.1) nelle direzioni e in energia, si ottiene la densità totale

$$n = \frac{2}{c^3} \int \nu^2 d\nu \int f(\mathbf{k}, \nu) d\Omega \quad (3.3.2a)$$

$$= \frac{8\pi}{c^3} \int \nu^2 f(\nu) d\nu \quad (\text{radiaz. isotropa}) \quad (3.3.2b)$$

Poichè ogni fotone trasporta un'energia  $h\nu$ , il prodotto

$$d^2u_\nu = h\nu d^2n_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^3} f(\mathbf{k}, \nu) d\nu d\Omega , \quad (3.3.3)$$

è eguale alla densità di energia dei fotoni che si propagano nell'angolo solido  $d\Omega$  con frequenza nell'intervallo  $d\nu$ . Infine, integrando la (3.3.3) si ottiene la densità totale di energia del campo radiativo (ad es., in  $\text{erg}/\text{cm}^3$ )

$$u = \frac{2h}{c^3} \int \nu^3 d\nu \int f(\mathbf{k}, \nu) d\Omega \quad (3.3.4a)$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 f(\nu) d\nu \quad (\text{radiaz. isotropa}) . \quad (3.3.4b)$$

Si noti che la richiesta che gli integrali (3.3.4) debbano essere finiti pone alcune limitazioni al comportamento della densità degli stati nei due limiti opposti di bassa ed alta energia. Infatti, affinché gli integrali si mantengano finiti è necessario che, per  $\nu \rightarrow \infty$ , la funzione  $\nu^3 f(\nu)$  tenda a zero più velocemente di  $\nu^{-1}$ . Ponendo  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$ , occorre quindi che  $\alpha > 4$ . Analogamente, se alle frequenze  $\nu \rightarrow 0$  il numero di occupazione diventa illimitato,  $f$  deve crescere al più con una legge del tipo  $f(\nu) \propto \nu^{-\alpha'}$ , con un esponente  $\alpha' < 4$ .

In un campo isotropo l'energia media dei fotoni è data dal rapporto

$$\langle h\nu \rangle = \frac{u}{n} = \frac{\int h\nu^3 f(\nu) d\nu}{\int \nu^2 f(\nu) d\nu} . \quad (3.3.5)$$

Una situazione di notevole interesse fisico è quella che si presenta quando i fotoni sono in equilibrio termodinamico con un sistema materiale che a sua volta si trova in equilibrio ad una data temperatura  $T$ . I risultati della meccanica statistica quantica mostrano che, in queste condizioni, la distribuzione dei fotoni è isotropa e il loro numero di occupazione medio assume la forma di equilibrio

$$f^{eq}(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} , \quad (3.3.6)$$

la quale differisce dalla (3.2.6) relativa ai fermioni in equilibrio per il segno nel denominatore e per l'assenza del potenziale chimico. Quest'ultima proprietà è una conseguenza della mancanza di conservazione del numero dei fotoni. Via via che tendono verso l'equilibrio, i fotoni in eccesso vengono rapidamente assorbiti. Viceversa, se vi è carenza di fotoni rispetto alla distribuzione prevista dalle leggi quantistiche, ne vengono creati di nuovi. L'equilibrio è raggiunto quando il potenziale chimico è nullo e i fotoni sono ripartiti tra le diverse frequenze secondo l'equazione

$$\frac{dn^P}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1} , \quad (3.3.7)$$

nota come **distribuzione di Planck**. Integrando la (3.3.7) su tutte le frequenze, si ricava la densità totale  $n^P$ . Il risultato più importante è che, all'equilibrio, la densità numerica assume un ben preciso valore, funzione della sola temperatura <sup>†</sup>

$$n^P = 16\pi \zeta(3) \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 = 20.237 T_K^3 \text{ cm}^{-3}. \quad (3.3.8)$$

Analogamente, dalla (3.3.3) segue che la distribuzione nello spettro di energia della radiazione di equilibrio è data dalla seguente **legge di Corpo Nero**

$$u_\nu^P(T) = h\nu \frac{dn}{d\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (3.3.9)$$

Integrata sulle frequenze, la (3.3.9) fornisce la densità di energia del campo radiativo, anch'essa funzione della sola temperatura:

$$u^P(T) = \frac{8\pi^5}{15c^3 h^3} (kT)^4 = a T^4. \quad (3.3.10)$$

La dipendenza della densità di energia di equilibrio dalla quarta potenza della temperatura costituisce la ben nota *legge di Stefan-Boltzmann*, ricavata inizialmente per via empirica. Il valore numerico della costante  $a$  è

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}.$$

Il comportamento spettrale delle funzione di Planck per diversi valori della temperatura è illustrato nella Figura 3.1a. Alle basse energie ( $h\nu \ll kT$ ), tutte le curve crescono proporzionalmente al prodotto  $T\nu^2$ , fino a raggiungere un valore massimo in corrispondenza all'energia

$$h\nu_{max} = 2.82 k T_K,$$

per poi decrescere in maniera esponenziale alle grandi energie, con un andamento asintotico  $u_\nu^P \propto \nu^3 \exp(-h\nu/kT)$ .

---

<sup>†</sup>  $\zeta(k)$  sono le *funzioni zeta di Riemann*. In particolare:

$$\zeta(3) = 1.202, \quad \zeta(4) = \pi^4/90, \quad \zeta(5) = 1.037.$$

### 3.4 – Equilibrio di Wien.

La rapidità con cui la radiazione si porta verso l'equilibrio termodinamico dipende solo in parte dall'efficienza degli scambi di energia tra i fotoni e la materia. Infatti, grazie al fatto che i fotoni possono essere facilmente creati o distrutti, un ruolo importante viene svolto dai meccanismi di assorbimento e di emissione. In assenza di questi processi sarebbe impossibile mantenere soddisfatte, ad esempio, le relazioni (3.3.7) e (3.3.8) che legano il numero di fotoni alla temperatura  $T$ .

In particolari condizioni di temperatura e densità, molto frequenti nei plasmi astrofisici rarefatti e caldi, può accadere che i meccanismi di formazione e distruzione dei fotoni siano poco importanti o avvengano su tempi molto più lunghi di quelli tipici dei processi di diffusione. In questi casi è ancora possibile che, a causa delle interazioni Compton, gli scambi di energia siano sufficientemente efficaci da mantenere la radiazione in uno stato di equilibrio statistico con la materia, ma non sono in grado di portare i fotoni verso il completo equilibrio termodinamico. Questa situazione singolare si verifica perchè la diffusione, quando agisce da sola, e in assenza dei processi stimolati, mantiene inalterato il numero di fotoni. Non potendo adeguarsi alla legge planckiana, i fotoni tendono verso una distribuzione isotropa con un numero di occupazione medio dato da

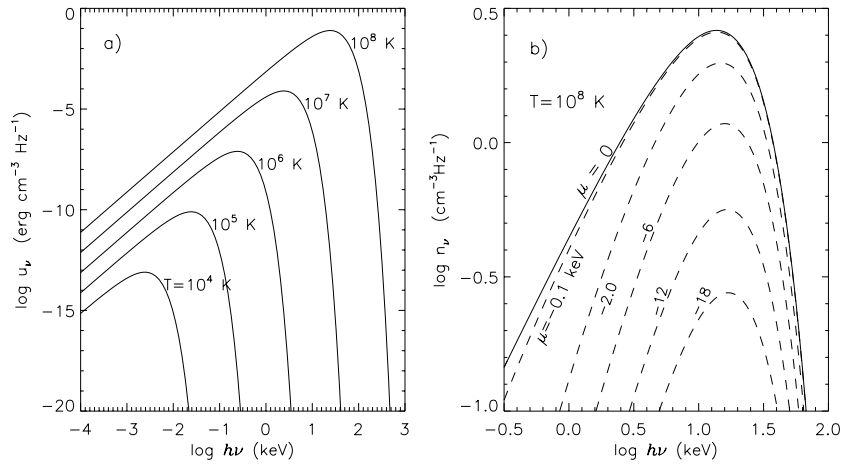
$$f^{eq} = \frac{1}{e^{(h\nu-\mu)/kT} - 1} . \quad (3.4.12)$$

Questa equazione differisce dalla funzione di Planck per la presenza del potenziale chimico  $\mu$ , il cui valore è tanto più negativo quanto maggiore è la carenza di fotoni rispetto alla distribuzione di vero equilibrio (3.4.6). La corrispondente legge spettrale

$$\frac{dn}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{e^{(h\nu-\mu)/kT} - 1} , \quad (3.4.13)$$

è nota come **distribuzione di Bose–Einstein**. Per taluni aspetti questa situazione è simile a quella che si presenta in un gas di fermioni. Infatti, per un'assegnata temperatura il potenziale chimico è fissato unicamente dalla densità numerica tramite l'equazione

$$n(\mu) = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{e^{(h\nu-\mu)/kT} - 1} \quad (3.4.14)$$



**Figura 3.1** a) Spettro della radiazione di corpo nero (scale logaritmiche). L'energia dei fotoni è misurata in keV. b) Distribuzione di Bose-Einstein  $n_\nu$  alla temperatura di equilibrio  $T = 10^8$  K per sei valori del potenziale chimico (in KeV). La curva continua individua la distribuzione di Planck ( $\mu = 0$ ).

Per lo stesso motivo anche la densità di energia dipende da  $\mu(n)$ :

$$u(\mu) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{(h\nu-\mu)/kT} - 1}. \quad (3.4.15)$$

La Figura 3.1b mostra l'andamento della distribuzione di Bose-Einstein al variare del potenziale chimico per una temperatura fissata  $T = 10^8$  K. Come si vede chiaramente, al tendere di  $\mu$  verso zero, le funzioni si portano verso il valore di vero equilibrio con la materia. Valori non nulli di  $\mu$  comportano differenze rispetto alla funzione di Planck  $u_\nu^P$  che riguardano soprattutto i fotoni di bassa energia i quali, proprio perchè si addensano maggiormente nei rispettivi stati quantici, sono anche i principali responsabili del comportamento peculiare di un gas di bosoni rispetto alle particelle fermioniche.

Quando la densità è molto inferiore a quella prevista dalla legge Planck si ha  $\mu \ll 0$  e la radiazione è detta in **equilibrio di Wien**. In questo caso è possibile ignorare 1 al denominatore del numero di occupazione, e la funzione di distribuzione in energia assume un aspetto simile alla distribuzione maxwelliana delle particelle relativistiche

$$n = 16\pi \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 e^{\mu/kT} \quad (3.4.16)$$

$$dn(x) = \frac{n}{2} x^2 e^{-x} dx, \quad (x = h\nu/kT). \quad (3.4.17)$$

### 3.5 – Equilibrio Statistico e Equilibrio Termodinamico.

E' opportuno fare alcune precisazioni sul ruolo svolto dal potenziale chimico in un gas di fotoni. Il fatto che la densità delle particelle determini il valore di  $\mu$  è una proprietà generale dei sistemi termodinamici. In un gas di fermioni, a densità elevate e basse temperature corrispondono valori grandi e positivi di  $\mu$ , con il conseguente instaurarsi del regime di *degenerazione fermionica*: ogni celletta dello spazio delle fasi con energia inferiore all'*Energia di Fermi*  $E_F$  è "saturata" dagli unici due elettroni che sono permessi dal principio di Pauli, mentre le rimanenti cellette con energia maggiore di  $E_F$  sono vuote. Ben diverso è invece il comportamento statistico dei fotoni, in quanto non esiste un limite superiore al numero di bosoni che possono occupare simultaneamente il medesimo stato quantico, situazione che impedisce il verificarsi di un fenomeno analogo alla degenerazione dei fermioni. Ancor più rilevante è la presenza di processi di creazione/assorbimento dei fotoni, *inevitabili in tutti fenomeni radiativi*, i quali non solo aiutano a portare la radiazione verso il *completo* equilibrio termodinamico con la materia in virtù degli scambi di energia, ma modificano opportunamente anche il numero totale di particelle. La graduale evoluzione della funzione di distribuzione  $f$  cessa solo quando viene raggiunta la condizione  $\mu = 0$ , e quindi  $n = n^P(T)$ .

Per chiarire ulteriormente questa importante proprietà, immaginiamo di realizzare una cavità completamente vuota, le cui pareti siano a contatto con un termostato di grande capacità e temperatura  $T$  costante. Supponiamo inoltre che sia possibile rivestire le pareti della cavità con un materiale ideale perfettamente *riflettente*, che non è in grado nè di creare nè di assorbire radiazione, ma solo di scambiare con essa energia. Poniamo all'interno della cavità un numero  $n$  di fotoni, con  $n$  molto inferiore al valore  $n^P(T)$  previsto dalla legge di Planck, ed inizialmente distribuiti sui vari livelli di energia in maniera arbitraria. A causa delle interazioni con la parete, la radiazione si porta verso l'*equilibrio statistico* di Wien, mentre il numero di fotoni rimane invariato. Supponiamo ora di aumentare gradualmente  $n$  immettendo nuovi fotoni attraverso un piccolo foro situato sulla parete. Di conseguenza, il potenziale chimico, inizialmente molto negativo, aumenta fino ad annullarsi quando  $n = n^P$ . In queste condizioni la distribuzione coincide con quella di Planck di equilibrio termodinamico. Ci si può chiedere ora che cosa accadrebbe se provassimo ad aumentare ulteriormente  $n$ . A differenza di quanto succede in un gas di fermioni, il potenziale chimico dei fotoni non può essere positivo altrimenti, come si vede dalla (3.5.14), il numero di fotoni sarebbe

illimitato in corrispondenza all'energia  $h\nu = \mu > 0$ , e l'energia totale (3.5.15) divergerebbe. Perciò ogni tentativo di inserire nuovi fotoni nella cavità *deve* essere destinato a fallire. Dobbiamo concludere che, durante l'interazione della radiazione con le pareti, oppure all'interno della cavità stessa, devono *necessariamente* intervenire adeguati processi capaci di impedire che  $n$  possa superare il valore di saturazione  $n^P$ . In altre parole, l'ipotesi dell'esistenza della pura diffusione, non accompagnata da fenomeni di emissione/assorbimento, è inconsistente con le leggi statistiche dei bosoni.

Naturalmente il tempo richiesto affinché il potenziale chimico si annulli può essere reso molto lungo diminuendo, ad esempio, il numero di assorbitori ed emettitori. In ogni caso tutti i processi fondamentali che coinvolgono l'interazione radiazione-materia devono essere tali da ridurre fortemente questo tempo quando  $n \rightarrow n^P$  †.

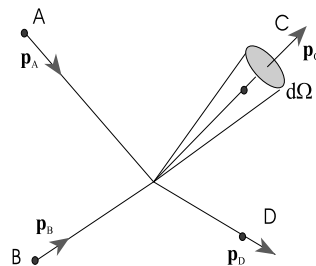
### 3.6 – Sezione d'urto

Il procedimento generale per il calcolo dell'emissività e dell'assorbimento dei fotoni da parte delle particelle è simile per tutti i processi ed ha come punto di partenza la formula della sezione d'urto. Nel paragrafo 2.8 la sezione d'urto è stata definita come rapporto tra l'energia irraggiata ed il flusso incidente. Tuttavia, come suggerisce il nome stesso, essa deriva da concetti essenzialmente microscopici ed è legata alla probabilità che l'evento in esame (per esempio, l'interazione tra due o più particelle) avvenga con specifiche modalità geometriche e dinamiche. La forma e la dipendenza della sezione d'urto dai parametri dell'interazione variano da processo a processo e vengono ricavati con i metodi tradizionali dell'elettrodinamica quantistica.

Consideriamo la generica interazione



† La necessità di non violare le leggi bosoniche è responsabile, tra l'altro, dell'*emissione stimolata* (v. il paragrafo 6.8) e dello *scattering stimolato* (paragrafo 5.5).



**Figura 3.2** Urto in un riferimento generico nel quale due particelle  $A$  e  $B$  producono due particelle  $C$  e  $D$ .

dove  $A, B, C, D$  rappresentano, per il momento, particelle massive interagenti (elettroni, ioni, ecc.)<sup>†</sup>. Ammettiamo, per semplicità, che il sistema sia isolato e scriviamo la conservazione del 4-momento  $\vec{p}$  nella forma

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D . \quad (3.6.2)$$

Queste (quattro) equazioni comportano una serie di vincoli sugli angoli di incidenza ed emissione e sui possibili stati finali in funzione della configurazione iniziale di ogni singolo evento.

L'analisi degli effetti collettivi dell'interazione richiede invece l'introduzione del concetto di sezione d'urto. In particolare, la *sezione d'urto differenziale*  $d^2\sigma/d\Omega dE$  fissa la probabilità che le particelle interagenti, con assegnati momenti iniziali  $\vec{p}_A$  e  $\vec{p}_B$ , producano una particella ( $C$  oppure  $D$ )<sup>‡</sup> con energia nell'intervallo  $dE$  e avente una direzione  $\mathbf{u}$  contenuta all'interno dell'angolo solido elementare  $d\Omega$  (Figura 3.2). Più esattamente, in un mezzo contenente  $n'_B$  centri diffusori nell'unità di volume, la *sezione d'urto totale*

$$n'_B \sigma(v'_A) = n'_B \int dE \int \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} d\Omega ,$$

ottenuta per integrazione della sezione differenziale su tutti i possibili stati finali dei prodotti, è eguale, per definizione, al rapporto tra la *rate* di reazione  $R_{AB}$  (numero di interazioni per unità di tempo e di volume) ed il flusso  $n'_A v'_A$  delle particelle incidenti:

$$R_{AB} = \frac{d^4\mathcal{N}}{d^3x dt} = n'_A v'_A n'_B \sigma(v'_A) . \quad (3.6.3)$$

Nella (3.6.3) si è implicitamente supposto che i “centri diffusori”  $B$  fungano da bersaglio fermo nel riferimento del laboratorio (LAB), per cui  $n'_{A,B}$  sono densità numeriche *solo* in questo particolare riferimento. Tuttavia, è utile scrivere la (3.6.3) in una forma che possa essere usata in un riferimento qualunque. A questo scopo, notiamo che il termine a sinistra è un invariante relativistico, in quanto rapporto tra un numero puro ed il quadrivolume invariante  $d^4x$ .

---

<sup>†</sup> L'estensione ad interazioni tra più corpi, come  $A+B \rightarrow C+D+E$ , sebbene formalmente più complessa, è simile al caso qui trattato.

<sup>‡</sup> Evidentemente se è noto lo stato finale di una particella, le leggi di conservazione (3.6.2) determinano lo stato dell'altra particella.

Inoltre,  $v'_A$  coincide proprio con la velocità relativa  $v_{rel}$  della particella  $A$  rispetto a  $B$ . Possiamo allora esprimere la velocità relativa in termini della velocità fisica  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  della particella nel riferimento generico  $S$  tramite le seguenti relazioni <sup>†</sup>

$$\gamma_{rel} = \gamma_A \gamma_B (1 - \boldsymbol{\beta}_A \cdot \boldsymbol{\beta}_B) , \quad (3.6.4)$$

$$\begin{aligned} v'_A/c &= \beta_{rel} = (1 - 1/\gamma_{rel}^2)^{1/2} \\ &= (\gamma_{rel}^2 - 1)^{1/2} [\gamma_A \gamma_B (1 - \boldsymbol{\beta}_A \cdot \boldsymbol{\beta}_B)]^{-1} . \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Le rimanenti quantità  $n'_{A,B}$  sono proiezioni rispetto al sistema solidale a  $B$ , mentre la sezione d'urto ha un intrinseco carattere scalare. Pertanto, se indichiamo con  $\vec{n}'_A = n'_A [1, \boldsymbol{\beta}']$  e  $\vec{n}'_B = n'_B [1, \mathbf{0}]$  le 4-correnti delle particelle  $A, B$  nel LAB, e con  $\vec{n}_{A,B} = n_{A,B} [1, \boldsymbol{\beta}_{A,B}]$  le corrispondenti quantità misurate in  $S$ , si ha  $\vec{n}'_A \cdot \vec{n}'_B = \vec{n}_A \cdot \vec{n}_B$  (invarianza del prodotto scalare), e quindi

$$n'_A n'_B = n_A n_B (1 - \boldsymbol{\beta}_A \cdot \boldsymbol{\beta}_B) . \quad (3.6.6)$$

La forma covariante della (3.6.3) diventa allora

$$R_{AB} = n_A n_B \frac{(\gamma_{rel}^2 - 1)^{1/2}}{\gamma_A \gamma_B} c \sigma(\boldsymbol{\beta}_A, \boldsymbol{\beta}_B) . \quad (3.6.7)$$

Oltre al riferimento del laboratorio, in cui  $B$  si trova a riposo, un altro riferimento naturale è dato dal *centro del momento* (CM) (o *centro di massa* <sup>‡</sup>). Lo studio del processo in questo sistema è particolarmente utile quando  $A$  e  $B$  sono particelle identiche, nel qual caso  $\vec{u}_A = \gamma_{cm} (1, \boldsymbol{\beta}_{cm})$  e  $\vec{u}_B = \gamma_{cm} (1, -\boldsymbol{\beta}_{cm})$ . Dall'invarianza del prodotto  $\vec{u}_A \cdot \vec{u}_B$  si ottiene

$$\gamma_{rel} = 2\gamma_{cm}^2 - 1 , \quad (\gamma_{rel}^2 - 1)^{1/2} = 2\gamma_{cm}^2 \beta_{cm} . \quad (3.6.8)$$

e la (3.6.7) può essere scritta nella forma

$$R_{AB} = n_A n_B \frac{2\gamma_{cm}^2 \beta_{cm}}{\gamma_A \gamma_B} c \sigma(\gamma_{cm}) . \quad (3.6.9)$$

<sup>†</sup> Ricordiamo che il prodotto scalare tra le 4-velocità  $u^i = \gamma[1, \boldsymbol{\beta}]$  di due particelle è eguale al fattore di Lorentz relativo, cioè  $\gamma_{rel} = -u^i_A u_{B i}$ .

<sup>‡</sup> La distinzione tra i due riferimenti è essenziale quando le particelle coinvolte sono i fotoni. Evidentemente, in quest'ultimo caso la definizione di centro di massa è priva di significato.

Se nella reazione (3.6. 1)  $A$  rappresenta un fotone di energia  $h\nu$  che si propaga nella direzione  $\mathbf{k}$ , l'equazione (3.6. 3) rimane valida purchè si sostituisca  $v'_A$  con  $c$ . Poichè ora la corrente di fotoni con densità numerica  $n_\gamma$  (nel riferimento generico) è data da  $\vec{n} = n_\gamma (1, \mathbf{k})$ , l'equivalente formula covariante risulta

$$R_{AB} = n_\gamma n_B (1 - \beta_B \cos \theta) c \sigma(h\nu, \beta_B, \cos \theta) \quad (3.6. 10)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione del fotone e quella della particella.

Nel tempo  $dt$  i fotoni subiscono  $R_{AB} dt$  interazioni e percorrono un cammino  $d\ell = c dt$ , per cui la frazione di fotoni sottratta al fascio è

$$\frac{dn_\gamma}{n_\gamma} = -\frac{R_{AB} dt}{n_\gamma} = -n_B (1 - \beta_B \cos \theta) \sigma d\ell \quad (3.6. 11)$$

la cui soluzione è

$$n_\gamma = n_0 \exp(-\tau_\gamma) ,$$

con

$$\tau_\gamma(\ell) = \int_0^\ell n_B (1 - \beta_B \cos \theta) \sigma d\ell . \quad (3.6. 12)$$

A  $\tau_\gamma$  viene dato il nome di *spessore ottico* relativo al processo  $\gamma - B$  lungo il cammino finito  $\ell$ , ed è legato alla probabilità  $\mathcal{P}(\ell) = n_\gamma/n_0 = \exp(-\tau_\gamma)$  che in questo tratto il fotone subisca un'interazione.

Infine, ponendo  $\beta_B = 1$ , la (3.6. 10) viene estesa alle interazioni del tipo *fotone - fotone* (v. il §4.2), per le quali si ha

$$R_{AB} = n_\gamma n_{\gamma_1} (1 - \cos \theta) c \sigma(\nu, \nu_1, \cos \theta) . \quad (3.6. 13)$$

Evidentemente il fattore  $c(1 - \cos \theta)$  svolge il ruolo di “velocità relativa” di un fotone rispetto all'altro fotone, anche se, a rigore, nelle interazioni fotone-fotone non è definibile il sistema “a riposo” rispetto ad una delle particelle.

### 3.7 – Distribuzione spettrale

Di solito, la grandezza primitiva che si ricava partendo da un'analisi quantistica di un'interazione tra particelle è la sezione d'urto differenziale  $d^2\sigma/dE d\Omega$ . La sezione totale viene calcolata invece mediante un'integrazione multipla estesa a tutti gli stati finali compatibili con i vincoli imposti dalle leggi di conservazione (3.6.2). Poichè la velocità di reazione  $R_{AB}$  è eguale anche alla *rate*  $\dot{n}$  di produzione delle particelle  $C$  (oppure  $D$ , si veda la prima nota del paragrafo precedente), la corrispondente *distribuzione spettrale*, cioè il numero di particelle prodotte nell'unità di tempo e di volume, con energia compresa nell'intervallo  $dE$ , segue direttamente dalla (3.6.7), ed è

$$\frac{d\dot{n}}{dE} = n_A n_B \frac{c(\gamma_{rel}^2 - 1)^{1/2}}{\gamma_A \gamma_B} \left( \frac{d\sigma}{dE} \right)_S . \quad (3.7.1)$$

Si tenga presente che l'equazione (3.6.7) è invariante relativistica e, di conseguenza, è tale anche il suo differenziale

$$d^2\sigma = \left( \frac{d^2\sigma}{dE d\Omega} \right) dE d\Omega . \quad (3.7.2)$$

Al contrario, la quantità

$$d\sigma = \left( \frac{d\sigma}{dE} \right) dE = dE \int_{4\pi} \left( \frac{d^2\sigma}{dE d\Omega} \right) d\Omega \quad (3.7.3)$$

non è invariante, perchè costruita tramite un integrale. Il fatto che la conoscenza di  $d\sigma/dE$  in un particolare riferimento non sia sufficiente per ricavarne il valore in un riferimento arbitrario complica di molto le formule delle distribuzioni spettrali, dal momento che i risultati diventano strettamente dipendenti dal sistema in cui vengono eseguiti. Il legame tra un riferimento ed un'altro viene calcolato allora utilizzando proprio l'invarianza della (3.7.2). Ad esempio, vale la seguente relazione tra il riferimento generico e il laboratorio

$$\left( \frac{d\sigma}{dE} \right)_S = \int_{4\pi} \left( \frac{dE_{LAB}}{dE} \right) \left( \frac{d^2\sigma}{dE_{LAB} d\Omega_{LAB}} \right) d\Omega_{LAB} , \quad (3.7.4)$$

oppure l'equazione equivalente quando la sezione d'urto differenziale è nota nel centro di massa.

Un'ulteriore complicazione deriva dal fatto che le espressioni fin qui derivate sono valide per flussi monocromatici e per direzioni ben definite delle

particelle incidenti. Nel caso più generale occorre mediare i risultati sulle funzioni di distribuzione  $f(\mathbf{p})$  delle particelle interagenti. A parte le situazioni di completa anisotropia, in cui le particelle incidenti provengono da un'unica direzione, la configurazione più semplice consiste in flussi totalmente isotropi, per i quali si ha

$$d^2n_k = n_k F_k(\gamma_k) d\gamma_k \frac{d\Omega_k}{4\pi} \quad (\text{con } k = A, B),$$

dove per comodità si è introdotta, al posto di  $f$ , la funzione di distribuzione normalizzata  $F$ , cioè tale che  $\int \int F d\gamma d\Omega = 1$ . Il calcolo della *rate* di reazione viene fatto sostituendo nelle formule precedenti a  $n_k$  il corrispondente termine differenziale  $d^2n_k$ , ed integrando quindi nelle direzioni e nell'energia degli stati iniziali. Poichè la sezione d'urto dipende dall'angolo relativo tra le due particelle, e, nelle nostre ipotesi, vi è simmetria rotazionale rispetto a questa direzione, uno dei due angoli solidi può essere scritto nella forma  $d\Omega/4\pi = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta$ , mentre l'integrazione sul secondo angolo solido può essere calcolata direttamente. Il risultato finale della *rate* invariante della reazione è

$$R_{AB} = \frac{n_A n_B}{2(1 + \delta_{AB})} \int_1^\infty F_A(\gamma_A) d\gamma_A \int F_B(\gamma_B) d\gamma_B \int \mathcal{V} c \sigma \sin\theta d\theta. \quad (3.7.5)$$

con

$$\mathcal{V} = \frac{p_A^i p_B^i}{E_A E_B} = \begin{cases} (\gamma_{rel}^2 - 1)^{1/2} / \gamma_A \gamma_B & \text{particella-particella} \\ (1 - \beta \cos\theta) & \text{particella-fotone} \\ (1 - \cos\theta) & \text{fotone-fotone} \end{cases}$$

La delta di Kronecker  $\delta_{AB}$  ( $\delta_{AA} = \delta_{BB} = 1$ ) viene introdotta per correggere il risultato quando le due particelle interagenti appartengono alla medesima distribuzione e per evitare quindi di sommare due volte sugli stessi stati. Gli estremi degli integrali più interni non sono quelli più naturali (cioè  $0, \infty$  e  $-\pi/2, +\pi/2$  rispettivamente) essendo sottoposti ai vincoli richiesti dalle leggi di conservazione.

Un'espressione analoga alla (3.7.5) vale anche per la distribuzione spettrale di uno dei prodotti

$$\frac{dn}{dE} = \frac{n_A n_B}{2(1 + \delta_{AB})} \int_1^\infty F_A d\gamma_A \int F_B d\gamma_B \int \mathcal{V} c \left( \frac{d\sigma}{dE} \right)_S \sin\theta d\theta. \quad (3.7.6)$$

### 3.8 – Tempi di rilassamento

Sebbene non direttamente connessi all'emissione della radiazione, i processi di termalizzazione sono importanti per stabilire se e in quali condizioni viene raggiunto l'equilibrio termodinamico da parte delle differenti specie di particelle che compongono un gas. Infatti, lo stato di un plasma dipende da un lato dall'efficienza dei processi di irraggiamento e di assorbimento di energia, e dall'altro dalla capacità delle particelle di ridistribuire l'energia tra loro.

I principali costituenti della materia stellare completamente ionizzata e, nello stesso tempo, anche i maggiori responsabili dell'irraggiamento, sono gli elettroni ed i protoni. Inoltre, se la temperatura del gas è relativistica, si possono instaurare le condizioni favorevoli alla creazione di coppie elettrone–positrone. L'interazione tra queste particelle cariche avviene soprattutto tramite forze coulombiane, ma importanti contributi possono derivare anche da effetti magnetici, di spin e, per i protoni, da interazioni nucleari.

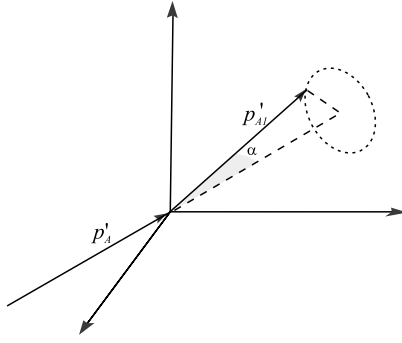
Quando in un plasma avvengono forti dissipazioni per la presenza di turbolenza o di onde d'urto, i protoni guadagnano energia molto più rapidamente degli elettroni. D'altra parte, gli elettroni, essendo più leggeri, si raffreddano più facilmente per irraggiamento. In alcune situazioni può accadere allora che gli scambi di energia tra queste due specie siano relativamente lenti, tanto che le rispettive temperature  $T_p$  e  $T_e$  si mantengono su valori molto differenti tra loro, pur rimanendo entro i limiti  $1 \lesssim T_p/T_e \lesssim m_p/m_e$ . Anche la rapidità delle interazioni elettrone–elettrone e protone–protone è fondamentale nel determinare la struttura del plasma, poichè se le scale temporali caratteristiche di termalizzazione sono molto più lunghe dei tempi di riscaldamento o raffreddamento, le particelle assumono distribuzioni differenti da quella maxwelliana di equilibrio, modificando quindi le loro proprietà emissive.

Vogliamo ora calcolare i tempi di rilassamento di una miscela formata da due gas di specie  $A$  e  $B$ . Ciascuna componente sia formata rispettivamente da particelle di massa  $m_A$  e  $m_B$  ed energia  $\gamma_A m_A c^2$  e  $\gamma_B m_B c^2$ . La *rate* invariante dell'interazione  $A + B \rightarrow A + B$  è (cfr. le 3.6.7)

$$R_{AB} = \frac{c}{1 + \delta_{AB}} \int \frac{(\gamma_{rel}^2 - 1)^{1/2}}{\gamma_A \gamma_B} d\sigma(\gamma_{rel}, \alpha) dn_A dn_B, \quad (3.8.1)$$

e quindi la *rate* di scambio di energia per particelle isotrope è

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c}{1 + \delta_{AB}} \int \langle \Delta E \rangle \frac{(\gamma_{rel}^2 - 1)^{1/2}}{\gamma_A \gamma_B} d\sigma(\gamma_{rel}, \alpha) dn_A dn_B. \quad (3.8.2)$$



**Figura 3.3** Scattering di una particella nel centro di massa. In questo riferimento la seconda particella ha momento opposto e non avviene alcun scambio di energia nell'urto.

In queste espressioni  $d\sigma$  è la sezione d'urto differenziale,  $\alpha$  l'angolo di scattering nel CM del sistema (Figura 3.3) e  $\langle \Delta E \rangle$  l'energia media scambiata nel *laboratorio* da una delle due specie, per esempio A (nel CM lo scambio di energia è nullo). Gli integrali sono estesi a tutti i *possibili* stati iniziali e finali delle particelle. Dallo studio cinematico dell'urto si ricava <sup>†</sup>

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{2m_A m_B \sin^2(\alpha/2)}{m_A^2 + m_B^2 + 2\gamma_{rel} m_A m_B} \times [m_A \gamma_B - m_B \gamma_A - \gamma_{rel}(m_A \gamma_A - m_B \gamma_B)] . \quad (3.8.3)$$

Poichè ci aspettiamo che distribuzioni non molto dissimili da quelle di equilibrio non diano luogo a grandi variazioni dei tempi di rilassamento, possiamo assumere che le particelle abbiano una distribuzione prossima a quella maxwelliana (3.2.9). Eseguendo quella parte degli integrali che coinvolgono l'isotropia, e ponendo  $\mu = m_A/m_B$ , si trova

$$\frac{dE}{dt} = 2\mu c \frac{n_A n_B}{1 + \delta_{AB}} \frac{kT_A - kT_B}{\Theta_A^2 \Theta_B^2 K_2(1/\Theta_A) K_2(1/\Theta_B)} \times \int_1^\infty d\gamma \int_{1/\Lambda}^{\alpha_2} \frac{(\gamma_{rel}^2 - 1)^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \mu^2 + 2\mu \gamma_{rel}} \frac{K_2(z)}{z^2} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega , \quad (3.8.3)$$

in cui  $z = [\Theta_A^{-2} + \Theta_B^{-2} + 2\gamma_{rel} \Theta_A^{-1} \Theta_B^{-1}]^{1/2}$  e  $\alpha_2 = \pi/(1 + \delta_{AB})$  è il massimo angolo di scattering. L'angolo minimo  $\alpha_1 = 1/\Lambda \approx \exp(-20)$  è fissato dalle leggi quantistiche sul minimo trasferimento di momento.

<sup>†</sup> Stepney, S., MNRAS 202, 467, 1983.

Nelle interazioni elettrone–protone si può usare la sezione d’urto di Rutherford

$$d\sigma(\gamma_{rel}, \alpha) = \frac{3}{32\pi\gamma_{rel}^2\beta^4} \left(1 + \frac{2\gamma_{rel}m_e}{m_p}\right) \frac{d\Omega}{\sin^2(\alpha/2)} \quad (3.8.4)$$

che, pur essendo basata sull’ipotesi di cariche puntiformi prive di spin, fornisce risultati sufficientemente accurati. Il calcolo dell’integrale fornisce la seguente espressione della *rate* di riscaldamento per unità di volume

$$\begin{aligned} \frac{dE_{ep}}{dt} &= \frac{3m_e}{2m_p} n_e n_p \sigma_T c \frac{(kT_e - kT_p)}{K_2(1/\Theta_e)K_2(1/\Theta_p)} \ln \Lambda \\ &\times \left[ \frac{2(\Theta_e + \Theta_p)^2 + 1}{\Theta_e + \Theta_p} K_1(1/\Theta_{ep}) + 2K_0(1/\Theta_{ep}) \right] \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

dove  $\Theta_e = kT_e/m_e c^2$ ,  $\Theta_p = kT_p/m_p c^2$  e  $\Theta_{ep} = \Theta_p \Theta_e / (\Theta_e + \Theta_p)$ .

Poichè ogni particella ha un’energia cinetica media eguale a  $\xi kT$ , con  $\xi = 3/2$  e  $\xi = 3$  nei limiti estremi non relativistico e relativistico rispettivamente, e la (3.8.5) ha la forma  $dE/dt \propto (kT_e - kT_p)$ , la scala temporale associata all’interazione viene usualmente definita dal rapporto

$$t_{ep} = \left| \frac{\xi n_e (kT_e - kT_p)}{dE_{ep}/dt} \right|. \quad (3.8.6)$$

Usando le espansioni delle funzioni di Bessel si trova, nei due casi non relativistico e relativistico, rispettivamente

$$t_{ep}^{NR} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m_p n_e (\Theta_e + \Theta_p)^{3/2}}{m_e n_p (n_e \sigma_T c) \ln \Lambda} \quad (3.8.6)$$

$$t_{ep}^{ER} = 4 \frac{m_p n_e}{m_e n_p} \frac{\Theta_p \Theta_e}{(n_e \sigma_T c) \log \Lambda}. \quad (3.8.7)$$

Ponendo  $m_p = m_e$ ,  $n_p = n_e$  e moltiplicando per un fattore 2 per tenere conto degli effetti di particelle identiche, si possono ottenere direttamente anche i limiti dei tempi di rilassamento relativi all’interazione elettrone–elettrone:

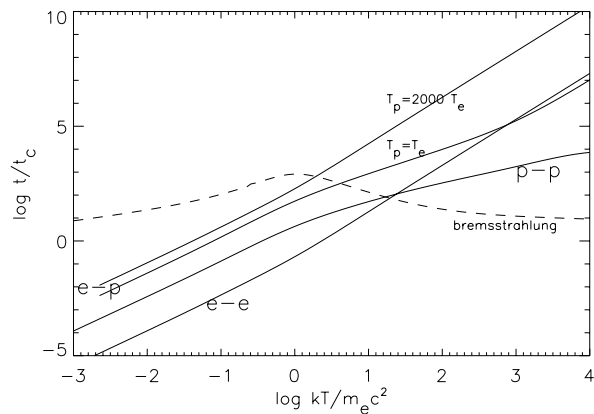
$$t_{ee}^{NR} = \frac{4\sqrt{\pi} \Theta_e^{3/2}}{(n_e \sigma_T c) \ln \Lambda} \quad (3.8.8)$$

$$t_{ee}^{ER} = \frac{8\Theta_e^2}{(n_e \sigma_T c) \log \Lambda}. \quad (3.8.9)$$

Analogamente, si trova che l’interazione coulombiana protone–protone non relativistica avviene su una scala temporale

$$t_{pp}^{NR} = \frac{4\sqrt{\pi} m_p \Theta_p^{3/2}}{(n_e \sigma_T c) m_e \ln \Lambda} \quad (3.8.10)$$

In realtà, occorre tenere presente che la situazione dello scattering protone-protone è molto più complessa poichè la sezione d'urto coulombiana (cfr. la 3.8.4) deve essere corretta in modo da includere anche gli effetti dovuti alle forze nucleari. Questi sono importanti soprattutto alle temperature più elevate e, come mostra il grafico della Figura 3.4, per temperature superiori a circa 1 MeV causano una sensibile diminuzione del tempo di rilassamento rispetto al tempo puramente columbiano.



**Figura 3.4** Tempi di rilassamento dei processi di scattering  $e-e$ ,  $e-p$  e  $p-p$  in unità del tempo compton  $t_c = 1/n_e \sigma_T c$ , assumendo  $n_e = n_p$ . L'interazione  $e-p$  è stata calcolata per i due valori estremi della temperatura dei protoni,  $T_p = T_e$  e  $T_p = m_p T_e / m_e$  rispettivamente. Per confronto viene mostrata anche la scala temporale associata all'irraggiamento per Bremsstrahlung (curva tratteggiata).

### 3.9 – Processi indotti

L'approccio semiquantistico fin qui seguito contiene alcune inconsistenze legate al fatto che gli elettroni e i fotoni sono stati trattati, di fatto, come punti materiali classici. Sappiamo però che le particelle elementari sono formate da pacchetti d'onda che possono essere considerati puntiformi solo se la loro dispersione, sia nello spazio fisico sia nello spazio dei momenti, è molto più piccola della risoluzione desiderata. D'altra parte è noto che esiste anche un limite imposto dal principio di indeterminazione alla massima risoluzione permessa. Anche se nei sistemi macroscopici, come quelli qui considerati, questi vincoli sono poco importanti, vi sono tuttavia alcuni effetti secondari che non è possibile ignorare nemmeno su grandi scale. Uno di questi riguarda la situazione che si viene a creare quando la densità delle particelle è talmente elevata da rendere inevitabile l'interferenza tra i vari pacchetti d'onda. Nello studio delle interazioni tra più corpi una delle principali conseguenze di questo fatto è proprio la deviazione del comportamento statistico delle particelle rispetto alla situazione classica. Il problema di non violare le leggi fondamentali dei bosoni era già stato sollevato in precedenza quando si è studiata la distribuzione di Wien (§3.4). In quest'ottica, nel caso delle interazioni tra particelle si rende necessario correggere opportunamente le equazioni del tipo (3.7.5) e (3.7.6), in modo da includere il fatto che la probabilità di una particella di trovarsi, dopo l'urto, in un determinato stato dipende necessariamente anche dal numero  $f$  delle particelle della medesima natura che già occupano quello stato. L'effetto prende il nome di *Processo stimolato* (o *indotto*), e comporta un aumento per un fattore  $[1 + f_\nu(\mathbf{p})]$  della sezione d'urto relativa alla produzione di fotoni. Viceversa, se le particelle sono fermioni la sezione deve essere diminuita per un fattore  $[1 - f_e(\mathbf{p})]$  per impedire un sovraffollamento degli stati già occupati oltre i limiti imposti dal Principio di Pauli.

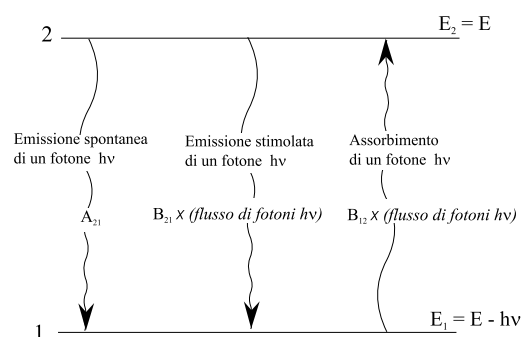
La principale conseguenza dei processi indotti è che sia la creazione sia la diffusione della radiazione vengono esaltate quando nel campo è già presente un elevato numero di fotoni mentre, al contrario, le transizioni di fermioni vengono depresse, o addirittura impedita, se lo stato finale è saturato (*stato degenero*). Poiché la nostra attenzione è qui rivolta verso configurazioni fisiche che hanno basse densità materiali, ignoreremo del tutto la degenerazione dei fermioni. Questo però non è sempre possibile nello studio dei processi radiativi, in quanto le conseguenze degli effetti indotti risultano fondamentali anche su scale macroscopiche, e non possono essere ignorate nemmeno in un'approccio fenomenologico dell'equazione del trasporto.

### 3.10 – Autoassorbimento

Ogni processo fondamentale di creazione di fotoni è sempre accompagnato da un corrispondente processo di assorbimento il cui principale effetto è quello di ridistribuire l'energia nello spettro. Il fenomeno è particolarmente importante alle basse frequenze e la sua motivazione deriva dalle statistica dei bosoni e quindi, da un punto di vista fenomenologico, da una necessità termodinamica.

Per semplicità qui ci limiteremo al caso in cui gli emettitori sono elettroni liberi in un plasma completamente ionizzato che irradiano per Bremsstrahlung ionico o magnetico in seguito alle continue deviazioni provocate da campi coulombiani o magnetici disordinati. Per questo motivo, assumeremo che la funzione di distribuzione  $f_e(p)$  degli elettroni sia isotropa, e quindi che la distribuzione in energia (densità numerica delle particelle con energia nell'intervallo  $dE$ ) sia data da

$$N(E) dE = 4\pi f_e(p) p^2 dp . \quad (3.10.1)$$



**Figura 3.5** La probabilità di emissione spontanea tra due livelli di energia (continui o discontinui) è eguale al coefficiente di Einstein  $A_{21}$ , ed è indipendente dal campo radiativo. L'emissione stimolata e l'assorbimento dipendono invece dal flusso di fotoni e dai coefficienti di Einstein  $B_{21}$  e  $B_{12}$ .

Fissiamo l'attenzione su due livelli di energia di un elettrone, rispettivamente  $E_2 = E$  e  $E_1 = E - h\nu$  (Figura 3.5). Secondo la teoria formulata in origine da Einstein, la probabilità di *emissione spontanea* per unità di tempo e di angolo solido di un fotone di energia  $h\nu$  in seguito ad una transizione dal livello superiore  $E_2$  a quello inferiore  $E_1$ , è eguale al *coefficiente di Einstein*  $A_{12}$ ,

ed è indipendente dal campo radiativo. La probabilità di *assorbimento* per la transizione opposta, da  $E_1$  a  $E_2$ , è invece proporzionale sia al coefficiente  $B_{12}$  sia al flusso in numero di fotoni di frequenza  $h\nu$ . Inoltre, per poter ritrovare la formula di Planck di equilibrio, occorre aggiungere a questi due processi anche l'*emissione stimolata*, collegata ad un terzo coefficiente  $B_{21}$ . Poichè anche quest'ultima transizione dipende dal flusso di fotoni incidenti, essa viene di solito associata all'assorbimento, come contributo *negativo* (si veda anche il §6.8).

La teoria stabilisce inoltre la seguente *Relazione di Einstein* tra i coefficienti

$$B_{12} = B_{21} = \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{21} \quad (3.10.2),$$

che, come vedremo più avanti, si riflette a sua volta in uno stretto legame tra le proprietà di assorbimento e di emissione della radiazione.

Consideriamo un singolo elettrone di energia  $E$  ed indichiamo con  $P(\nu, E)$  la potenza spettrale emessa alla frequenza  $h\nu$  in tutte le direzioni in seguito ad un dato meccanismo fisico, che supponiamo noto (per es. Bremsstrahlung). Dividendo  $P$  per l'energia e per l'angolo solido  $4\pi$ , si ottiene la probabilità di emissione

$$A_{21} = \frac{P(\nu, E)}{4\pi h\nu}. \quad (3.10.3)$$

L'emissività monocromatica *spontanea* (cioè l'energia emessa alla frequenza  $\nu$  in tutte le direzioni, per un unità di tempo e di volume) si ottiene invece sommando  $P(\nu, E)$  su tutti gli stati della distribuzione di elettroni, cioè

$$4\pi j_\nu = \int f_e(p) P(\nu, E) 4\pi d^3p = \int N(E) P(\nu, E) dE. \quad (3.10.4)$$

Come si è detto nel paragrafo precedente, la probabilità di emissione di un quanto di energia  $h\nu$  è aumentata se l'elettrone è esposto ad un flusso radiativo di frequenza  $\nu$ , e l'emissione avviene esattamente nella stessa direzione dei fotoni incidenti. Indichiamo con  $\Phi_\nu(\mathbf{k})$  il flusso in numero di fotoni di frequenza  $\nu$  nella direzione  $\mathbf{k}$ , per unità di frequenza e di angolo solido, e con  $I_\nu(\mathbf{k}) = h\nu \Phi_\nu(\mathbf{k})$  il corrispondente flusso in energia. Poichè la velocità di propagazione è  $c$ , dalla (3.3.1) si ricava

$$\Phi_\nu(\mathbf{k}) = c \frac{2\nu^2}{c^3} f_\nu \quad (3.10.5a)$$

$$I_\nu(\mathbf{k}) = h\nu \Phi_\nu(\mathbf{k}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} f_\nu \quad (3.10.5b)$$

La probabilità per unità di tempo dell'emissione stimolata è data dal prodotto  $B_{21} I_\nu$ . Pertanto, in virtù delle relazioni (3.10.2), il numero di fotoni emessi in ogni direzione da un singolo elettrone che inizialmente si trova nello stato  $E_2$  è  $4\pi B_{21} I_\nu = 4\pi A_{21} f_\nu$ . Prendendo in considerazione tutte le possibili transizioni, il numero di fotoni prodotti per effetto stimolato dagli elettroni contenuti nell'unità di volume è dato da

$$\begin{aligned} \dot{n}_{stim} &= f_\nu \int 4\pi A_{21} f_e(p) d^3p \\ &= \frac{f_{ph}(\nu)}{h\nu} \int P(\nu, E) f_e(p) d^3p. \end{aligned} \quad (3.10.6)$$

Un ulteriore risultato della teoria è il fatto che l'assorbimento dei fotoni obbedisce alla medesima legge dell'emissione indotta e, grazie alle relazioni di Einstein, con gli stessi coefficienti. L'unica differenza tra i due processi riguarda infatti lo stato iniziale dell'elettrone, che nell'emissione ha energia  $E$ , mentre nel momento dell'assorbimento del fotone  $\nu$  la sua energia è  $E - h\nu$ . Perciò, partendo dalla probabilità di assorbimento  $B_{12} I_\nu$ , e ripetendo lo sviluppo precedente, si trova che il numero di fotoni assorbiti è

$$\dot{n}_{ass} = \frac{f_{ph}(\nu)}{h\nu} \int P(\nu, E - h\nu) f_e(p - h\nu/c) d^3p. \quad (3.10.7)$$

Poichè le due espressioni (3.10.6) e (3.10.7) hanno la medesima forma, si assume convenzionalmente che l'assorbimento totale sia eguale alla somma del vero assorbimento più l'emissione stimolata, presa col segno negativo. Il rapporto tra il numero totale di fotoni assorbiti nell'unità di volume  $\dot{n}_{ass} - \dot{n}_{stim}$  e il flusso in numero (3.10.5a) è, per definizione, il *coefficiente di autoassorbimento* <sup>†</sup>

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{c^2}{2h\nu^3} \int P(\nu, E) [f_e(p - h\nu/c) - f_e(p)] d^3p \\ &= \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int \left[ \frac{f_e(p - h\nu/c)}{f_e(p)} - 1 \right] N(E) P(\nu, E) dE. \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

Questa relazione mostra come, per un dato processo, la conoscenza della potenza  $P(\nu, E)$  emessa da un singolo elettrone e della funzione di distribuzione

---

<sup>†</sup> Più spesso il coefficiente di assorbimento viene definito come rapporto tra l'energia assorbita alla frequenza  $\nu$  e il flusso di energia radiativa (v. §6.8). Evidentemente nel caso monocromatico le due definizioni coincidono.

$f_e$  sia da sola sufficiente per ricavare sia l'emissività, tramite la (3.10.4), sia il coefficiente di assorbimento (3.10.8).

Un'importante applicazione riguarda il caso di un gas di elettroni con una distribuzione maxwelliana  $f_e = \exp(\mu) \exp(-E/kT)$ . Dal calcolo diretto si trova

$$\alpha_\nu^{term} = \frac{c^2(e^{h\nu/kT} - 1)}{8\pi h\nu^3} \int N(E)P(\nu, E) dE = j_\nu/B_\nu(T), \quad (3.10.9)$$

cioè in un gas *in equilibrio termodinamico* il rapporto  $j_\nu/\alpha_\nu$  tra l'emissività e l'assorbimento è indipendente dal campo radiativo e dalle caratteristiche chimico-fisiche della materia. Esso dipende infatti solo dalla temperatura di equilibrio attraverso la **funzione universale di Planck**

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (3.10.10)$$

la quale, come vedremo, svolge un ruolo fondamentale nella teoria del trasporto radiativo. Il risultato contenuto nella (3.10.9) è noto come **Teorema di Kirchhoff** e ne daremo più avanti anche una interpretazione basata sulle proprietà termodinamiche della materia (v. il §6.10).

Si noti come, alle basse frequenze ( $h\nu/kT \ll 1$ ) l'emissività di Bremsstrahlung termico (2.5.3) si mantiene all'incirca costante, mentre il relativo coefficiente di assorbimento diventa proporzionale all'inverso del quadrato della frequenza

$$\alpha_\nu \propto \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \approx \nu^{-2} \quad (h\nu \ll kT). \quad (3.10.11)$$

Questi risultati, ed in particolare il teorema di Kirchhoff, sono validi solo se gli elettroni si trovano in equilibrio termodinamico. Se viceversa, la materia non è in equilibrio, la dipendenza degli integrali dalla funzione di distribuzione rende la relazione tra  $\alpha_\nu$  e  $j_\nu$  più complicata rispetto alla (3.10.9). Una situazione che trova un'interessante applicazione astrofisica riguarda i plasmi nei quali gli elettroni hanno una distribuzione *di potenza*

$$N(E) dE = K_e E^{-s} dE = K\gamma^{-s} d\gamma, \quad (3.10.12)$$

con  $\gamma = E/m_e c^2$  e  $K_e = (m_e c^2)^{1-s} K$ . E' questo, ad esempio, il caso dell'emissione di sincrotrone da parte di elettroni relativistici nei resti delle supernovae e, più in generale, in plasmi magnetizzati in cui sono presenti onde

d'urto. Attraverso particolari processi magnetoidrodinamici le cariche vengono rapidamente e continuamente accelerate verso velocità relativistiche, in maniera tale da soddisfare con sufficiente approssimazione la legge (3.10.12) in un ampio intervallo di energia  $[E_{min} - E_{max}]$ , con  $m_e c^2 \ll E_{min} \ll E_{max}$ . Poichè l'assorbimento avviene principalmente in seguito a transizioni per le quali  $h\nu/c \ll p$ , possiamo usare lo sviluppo approssimato

$$f_e(p - h\nu/c) = f_e(p) - \left( \frac{df_e}{dp} \right) \frac{h\nu}{c}. \quad (3.10.13)$$

In questo modo la (3.10.8) diventa

$$\alpha_\nu = \frac{c}{8\pi\nu^2} \int \frac{d(\log f_e)}{dp} N(E) P(\nu, E) dE. \quad (3.10.14)$$

Inoltre, poichè gli elettroni sono fortemente relativistici, si può ritenere che  $E = pc$ , e quindi, dalla (3.10.1)

$$\alpha_\nu = -\frac{c^2}{8\pi\nu^2} \int P(\nu, E) E^2 \frac{d}{dE} \left[ \frac{N(E)}{E^2} \right] dE. \quad (3.10.15)$$

Usando la legge (3.10.12) e la potenza emessa per sincrotrone (2.7.3), si ottiene con un calcolo laborioso <sup>†</sup> la seguente espressione del coefficiente di assorbimento per una distribuzione isotropa delle velocità e del campo magnetico

$$\alpha_\nu = G(\alpha) K r_o c \left( \frac{3e\mathcal{B}}{4\pi m_e c} \right)^{\alpha+3/2} \nu^{-(\alpha+5/2)}, \quad (3.10.16)$$

dove  $\alpha = (s-1)/2$ . Nell'intervallo  $0 \lesssim \alpha \lesssim 3$  il complicato fattore  $G(\alpha)$  è approssimabile con la funzione  $G \approx 0.7(1 + \alpha^4/16)$ . Adoperando infine l'emissività totale per sincrotrone (2.7.9), risulta che il rapporto

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \propto \nu^{5/2} \quad (3.10.17)$$

è il medesimo, indipendentemente dal valore dell'esponente della legge di potenza. Si noti che la dipendenza della frequenza dalla potenza  $5/2$  differisce da quella trovata nel caso della *radiazione termica* che, alle basse frequenze, è proporzionale a  $\nu^2$ . La differenza è evidentemente causata dalla mancanza di equilibrio termodinamico per elettroni che obbediscono alla legge (3.10.12).

<sup>†</sup> Ginzburg, V. e Syrovatskii, S., *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*, 3, 297, 1965.

Il coefficiente di assorbimento monocromatico (3.10.8) ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza ( $\text{cm}^{-1}$ ). Il rapporto tra  $\alpha_\nu$  e la densità elettronica

$$\sigma_\nu = \alpha_\nu/n_e \quad (3.10.18)$$

ha quindi le dimensioni di un'area, ed è associato alla sezione d'urto per assorbimento.



