

CAPITOLO IV

PROCESSI RADIATIVI QUANTO-RELATIVISTICI

4.1 – Introduzione

Nel Capitolo 1 si sono esaminate le proprietà della radiazione Bremsstrahlung generata dall'interazione tra cariche elettriche e si è dimostrato che, nell'approssimazione di dipolo, l'emissione è nulla se le particelle coinvolte sono identiche. Si è però sottolineato che questo risultato non è vero in generale, tanto che nei plasmi molto caldi l'irraggiamento dovuto, ad esempio, agli incontri elettrone-elettrone può essere paragonabile, o addirittura superiore, a quella del Bremsstrahlung tradizionale. Se poi la temperatura è superiore a $\sim 10^9$ K, a causa della formazione di un grande numero di coppie elettrone-positrone, anche le interazioni dei positroni con se stessi e con gli elettroni e gli ioni, possono svolgere un ruolo primario nel caratterizzare le proprietà emissive del plasma.

Data la loro rilevanza astrofisica, in questo capitolo esamineremo brevemente le più importanti caratteristiche di questi processi che, essendo tipici dei plasmi di alta energia, necessitano di un approccio relativistico e quantistico. Purtroppo in tali condizioni le sezioni d'urto risultano matematicamente molto complesse, tanto da rendere eseguibile solo per via numerica il calcolo delle velocità delle reazioni. Esistono tuttavia alcuni sviluppi semianalitici, validi rispettivamente nel limite di basse velocità o nella situazione opposta estremamente relativistica. Nei prossimi paragrafi verranno riportate, quando esistono, le formule approssimate delle emissività o degli assorbimenti dei principali processi valide in questi due limiti.

4.2 – Fotoproduzione di coppie

Nonostante non vi siano quantità apprezzabili di antimateria nel nostro universo, in alcune classi di corpi celesti (*gamma-ray bursts*, sorgenti X e gamma non transienti, stelle di neutroni magnetizzate, Nuclei di Galassie Attive, ecc.) si possono instaurare le condizioni adatte alla formazione e alla successiva annichilazione di coppie di elettroni/positroni. Dal punto di vista astrofisico uno dei più importanti processi per la creazione di coppie è dato dalla seguente reazione di *fotoproduzione*

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+ . \quad (4.2.1)$$

Per poter avvenire, questo processo richiede un'elevata densità di fotoni con energia superiore all'energia di massa a riposo $m_e c^2$.

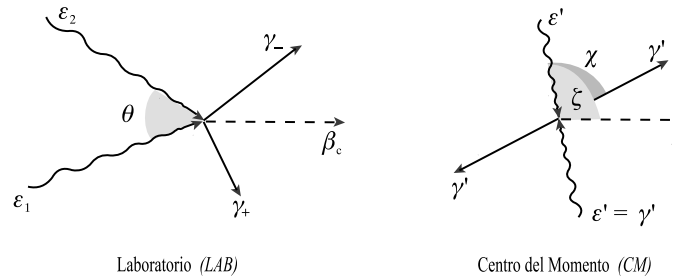


Figura 4.1 Geometria del processo di produzione di coppie nel *laboratorio* e nel *centro del momento*.

Indichiamo con $\epsilon_1 = h\nu_1/m_e c^2$ e $\epsilon_2 = h\nu_2/m_e c^2$ le energie dei due fotoni in un riferimento generico, espresse nelle unità di massa dell'elettrone. In questo riferimento, che per comodità chiameremo laboratorio (LAB), i rispettivi 4-momenti, in unità $m_e c$, sono $\vec{k}_i = [\epsilon_i, \epsilon_i]$ ($i = 1, 2$). Sebbene le informazioni sullo stato fisico del campo radiativo siano usualmente assegnate nel LAB, è più conveniente affrontare la risoluzione del problema nel *centro del momento* (CM) del sistema. Per definizione, l'osservatore solidale al CM misura un momento complessivo nullo, e la trasformazione di Lorentz che permette di passare dal LAB al CM si ottiene calcolando il fattore di Lorentz γ_{cm} che sta alla base delle seguenti relazioni

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 \rightarrow \epsilon'_1 + \epsilon'_2 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow \epsilon' ,$$

dove ϵ' è l'energia comune ai due fotoni nel riferimento CM, rispetto al quale si ha, evidentemente, $\vec{k}'_1 = [\epsilon', \epsilon']$ e $\vec{k}'_2 = [\epsilon', -\epsilon']$ (Figura 4.1). Da un calcolo diretto, basato sull'invarianza del prodotto scalare dei 4-momenti, si trova $\vec{k}'_1 \cdot \vec{k}'_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 (1 - \cos \theta) = 2\epsilon'^2$, e quindi

$$\epsilon'^2 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2} (1 - \cos \theta) \quad (4.2.2)$$

Dalla conservazione dell'energia segue anche l'eguaglianza tra ϵ' e l'energia $\gamma' = \gamma'_+ = \gamma'_-$ degli elettroni della coppia.

Analogamente, indicando con $\vec{u}_{cm} = \gamma_{cm}[1, \boldsymbol{\beta}_{cm}]$ la 4-velocità relativa tra i due riferimenti, l'invarianza dei prodotti $\vec{u}_{cm} \cdot \vec{k}'_{1,2}$ permette di scrivere

$$\gamma_{cm} = (1 - \beta_{cm}^2)^{-1/2} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon'} \quad (4.2.3)$$

$$\gamma_{\pm} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} (1 \pm \beta' \beta_{cm} \cos \zeta), \quad (4.2.4)$$

dove ζ è l'angolo tra le direzioni del fotone e della velocità $\boldsymbol{\beta}_{cm}$ nel CM, e

$$\beta'^2 = 1 - 1/\gamma'^2 = 1 - 1/\epsilon'^2 = 1 - 2[\epsilon_1 \epsilon_2 (1 - \cos \theta)]^{-1}. \quad (4.2.5)$$

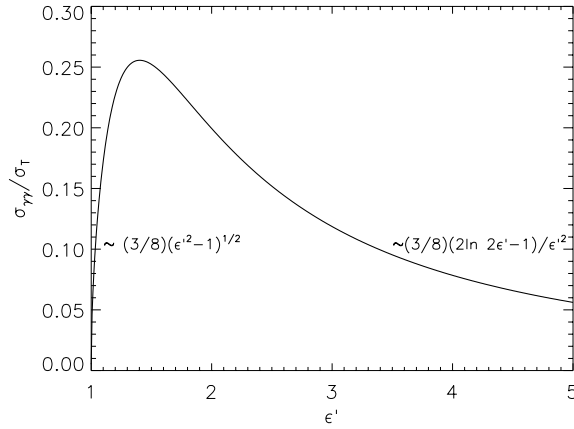


Figura 4.2 Sezione d'urto totale per produzione di coppie in funzione dell'energia dei fotoni nel CM

Da questa equazione si vede chiaramente che l'energia minima richiesta per la creazione di una coppia elettrone/positrone è $\epsilon' = 1$, e quindi dalla (4.2.2) segue che la condizione affinché il processo possa aver luogo è

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \geq 1. \quad (4.2.6)$$

In particolare, la condizione di soglia $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$ richiede che i fotoni siano in opposizione ($\theta = \pi$).

Mediante calcoli di elettrodinamica quantistica [†] è possibile ricavare la sezione d'urto differenziale del processo, che nel CM è data da

$$\frac{d^2 \sigma_{\gamma\gamma}}{d\Omega' d\gamma'} = \frac{3\sigma_T \beta'}{32\pi \gamma'^2} \left[\frac{3 - \beta'^4}{1 - x^2} - \frac{1 + x^2}{\gamma'^4 (1 - x^2)^2} - 1 \right] \delta(\gamma' - \epsilon'), \quad (4.2.7)$$

con $x = \beta' \cos \chi$. La funzione di Dirac mette in evidenza il fatto che l'energia di ciascun fotone viene interamente trasferita all'elettrone (come se nel CM il processo consistesse in una semplice trasformazione 1 fotone \rightarrow 1 elettrone!).

La sezione d'urto totale (rapporto tra numero di elettroni, o positroni, creati nell'unità di tempo e il flusso di fotoni non polarizzati), è data da

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\epsilon') = \frac{3\sigma_T}{16\epsilon'^2} \left[\left(2 + \frac{2}{\epsilon'^2} - \frac{1}{\epsilon'^4} \right) \ln \frac{1 + \beta'}{1 - \beta'} - 2\beta' \left(1 + \frac{1}{\epsilon'^2} \right) \right], \quad (4.2.8)$$

e, come abbiamo visto nel capitolo precedente, è indipendente dal riferimento. Nella (4.2.8) la velocità β' è direttamente legata all'energia del fotone tramite la 4.2.5. L'andamento della sezione d'urto, mostrato in Figura 4.2, presenta un massimo per $\epsilon' \approx 1.4$. Dalla (4.2.2) segue dunque che i fotoni di energia più elevata interagiscono più efficacemente con i fotoni meno energetici

$$\epsilon'_1 \approx \frac{2}{\epsilon'_2} \frac{2}{1 - \cos \theta} \geq \frac{2}{\epsilon'_2}. \quad (4.2.9)$$

Pertanto in prossimità dei valori di soglia i processi più probabili avvengono tra fotoni con energie $\epsilon'_1 \approx 2/\epsilon'_2$.

A seconda che l'attenzione sia rivolta verso gli stati iniziali oppure verso quelli finali, il processo diretto $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$ viene visto o come assorbimento di fotoni oppure come creazione di coppie elettrone/positrone. Analogamente, il processo inverso $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ appare o come annichilazione di particelle oppure come emissione di radiazione.

[†] Jauch J.M. e Rohrlich, R., 1976, *The Theory of Photons and Electrons* (Berlino: Springer-Verlag).

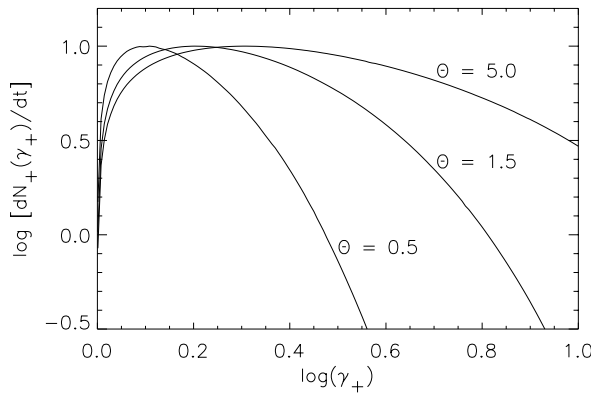


Figura 4.3 Distribuzione spettrale (normalizzata al massimo) degli elettroni creati in un campo radiativo con distribuzione di Wien, per tre valori della temperatura $\Theta = kT/m_e c^2$. La scala verticale è arbitraria

Un esempio della prima situazione è dato dalla fotoproduzione di coppie da parte di un flusso di radiazione isotropa che attraversa un altro campo radiativo, anch'esso isotropo. Indichiamo con $dn_i = n_i F(\varepsilon_i) d\varepsilon_i$ ($i = 1, 2$) le densità differenziali delle due distribuzioni (non necessariamente eguali). L'interazione genera positroni (e elettroni) con una distribuzione in energia calcolabile risolvendo l'integrale (cfr. l'equazione §3.7.6)

$$\frac{d\dot{n}}{d\gamma_+} = \frac{1}{4} c n_1 n_2 \times \int_0^\infty F_1 d\varepsilon_1 \int_{\varepsilon_{2min}}^\infty F_2 d\varepsilon_2 \int_{-1}^{\mu_{max}} (1 - \mu) d\mu \oint \frac{d^2 \sigma_{\gamma\gamma}}{d\Omega' d\gamma'} \frac{d\gamma'}{d\gamma_+} d\Omega', \quad (4.2.10)$$

dove $\mu = \cos \theta$. Gli estremi degli integrali compatibili con le leggi di conservazione sono $\varepsilon_{2min} = \max[1/\varepsilon_1, \gamma_+ + 1 - \varepsilon_1]$ e $\mu_{max} = 1 - 2/\varepsilon_1 \varepsilon_2$.

La Figura 4.3 mostra il risultato di un'integrazione numerica della (4.2.10) ottenuta assumendo una radiazione di Wien che interagisce con se stessa. La distribuzione spettrale delle coppie positroni/elettroni è stata calcolata per tre valori differenti della temperatura T della radiazione. Si noti che la produzione di coppie è efficace anche quando kT è inferiore a $m_e c^2$. Questo fatto è dovuto alle interazioni tra i fotoni della coda di alta energia dello spettro di Wien e i fotoni di energia più bassa (ma tale da superare il valore di soglia (4.2.6)).

Con un procedimento simile, ma considerando ora il processo come "assorbimento" di radiazione, è possibile ricavare lo *spessore ottico* differenziale

di fotoni monocromatici di energia ϵ_1 che attraversano un campo radiativo isotropo con distribuzione spettrale

$$d^2n = \frac{1}{4\pi} n_\gamma F_\gamma(\epsilon) d\epsilon d\mu \int d\varphi = \frac{1}{2} n_\gamma F_\gamma(\epsilon) d\epsilon d\mu. \quad (4.2.11)$$

Dalla (3.6.11), con $\beta_B = 1$, mediata sulla distribuzione di energia e direzione dei fotoni del campo (4.2.11), si ottiene

$$\frac{d\tau_{\gamma\gamma}(\epsilon_1)}{d\ell} = \frac{n_\gamma}{2} \int_{\epsilon_{min}}^{\infty} F_\gamma(\epsilon) d\epsilon \int_1^{\mu_{max}} (1-\mu) \sigma_{\gamma\gamma}(\epsilon, \epsilon_1, \mu) d\mu = a_{\gamma\gamma}(\epsilon_1) \quad (4.2.12)$$

dove $a_{\gamma\gamma}(\epsilon_1)$ (in cm^{-1}) è il *coefficiente di assorbimento* per produzione di coppie per un fotone di energia ϵ_1 che attraversa il campo.

Assumendo nuovamente equilibrio di Wien anche per il fotone che attraversa il campo, e mediando quindi sull'energia ϵ_1 , si ricava la *rate* $\dot{n}_{\gamma\gamma} = n_\gamma c a_{\gamma\gamma}(T)$ di assorbimento dei fotoni per produzione di coppie in un plasma termico. L'andamento di $a_{\gamma\gamma}(T)$ in funzione della temperatura è illustrato nella Figura 4.4.

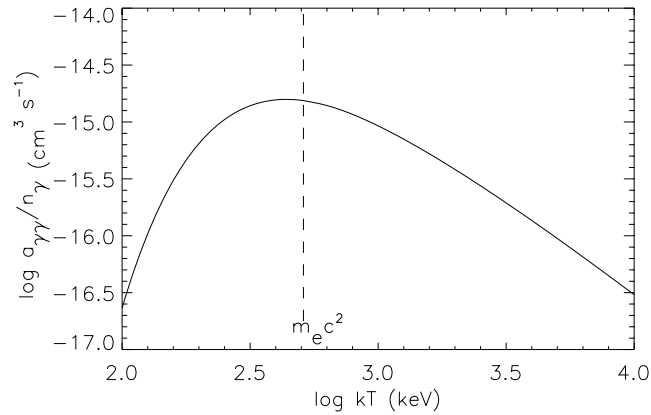


Figura 4.4 Nel caso di una distribuzione di Wien, il numero di fotoni assorbiti per fotoproduzione, per unità di volume e di tempo, è $n_\gamma c a_{\gamma\gamma}(T)$. La figura mostra l'andamento di $a_{\gamma\gamma}(T)$ con la temperatura.

4.3 – Annichilazione

Un'efficace fotoproduzione di coppie elettrone–positrone richiede un'elevata densità numerica di fotoni con energie distribuite in una banda abbastanza ampia da soddisfare contemporaneamente la condizione di soglia (4.2.6) e la relazione (4.2.9) sulla massima probabilità della reazione. Nei gas molto caldi, o nei raggi cosmici, possono diventare importanti per la creazione di coppie anche reazioni alternative alla fotoproduzione, basate sull'interazione particella–particella, come, ad esempio, $e + e \rightarrow e + e + e^+ + e^-$. In ogni caso, una volta creati, il destino dei positroni dipende molto dalla densità del mezzo. Se la densità è molto bassa, le coppie sono in grado di percorrere anche grandi distanze prima venire distrutte per annichilazione



I fotoni così prodotti hanno energie sufficienti per formare nuovamente coppie, e possono innescare un processo a cascata che prosegue finchè la diluizione non diventa tale da diminuirne l'efficienza.

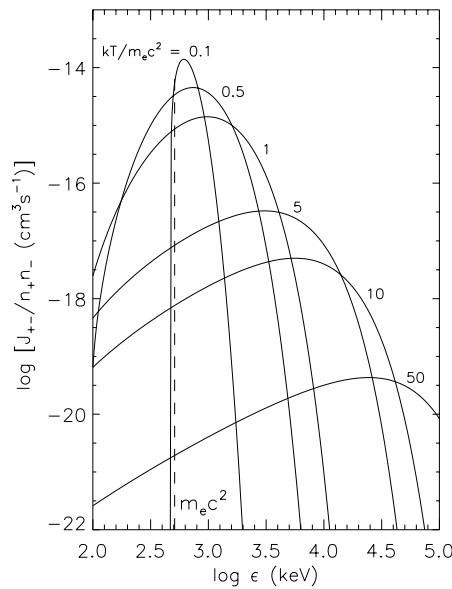


Figura 4.5 Emissività spettrale per annichilazione di coppie elettrone–positrone per alcuni valori della temperatura.

Poichè i tempi coulombiani di rilassamento tra le cariche sono molto brevi, se le perdite radiative non sono troppo elevate è facile che le particelle riescano a

portarsi verso l'equilibrio termico via via che vengono prodotte. In assenza di altre interazioni, e quando la temperatura del gas non è relativistica, lo spettro di energia della radiazione generata per annichilazione presenta un picco relativamente stretto, centrato attorno al caratteristico valore $m_e c^2 = 511$ keV. All'aumentare della temperatura, lo spettro diventa sempre più allargato e spostato verso energie maggiori (Figura 4.5).

La geometria del processo di annichilazione rimane eguale a quella illustrata nella Figura 4.1, ma con le direzioni invertite. Espressa in funzione dell'energia di una delle due particelle nel CM, la sezione d'urto invariante è

$$\sigma_A(\gamma_{cm}) = \frac{3\sigma_T}{16\gamma_{cm}^2\beta_{cm}^2} \times \left[(2 + 2\gamma_{cm}^{-2} - \gamma_{cm}^{-4}) \ln \frac{1 + \beta_{cm}}{1 - \beta_{cm}} + \right. \\ \left. - 2\beta_{cm}(1 + \gamma_{cm}^{-2}) \right] = \frac{\sigma_{\gamma\gamma}(\gamma_{cm})}{2\beta_{cm}^2}. \quad (4.3.2)$$

Nel caso di una distribuzione isotropa di particelle, la *rate* di annichilazione per unità di volume risulta (cfr. la 3.7.5)

$$R_{\pm} = \frac{n_+ n_-}{2} \int_1^{\infty} d\gamma_+ F_+(\gamma_+) \int_1^{\infty} d\gamma_- F_-(\gamma_-) \overline{v\sigma} \quad (4.3.3)$$

dove

$$\overline{v\sigma} = \int_{-1}^{+1} c \sigma_A \frac{2\gamma_{cm}^2 \beta_{cm}}{\gamma_+ \gamma_-} d\mu \\ = \frac{6c\sigma_T}{4\beta_+ \gamma_+^2 \beta_- \gamma_-^2} \left[(1-x)^{-3/2} x^2 L(x) - 2x + \frac{3}{2} L^2(x) \right]_{x_-}^{x_+}$$

con $L(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$ e $x_{\pm} = [1 + \gamma_+ \gamma_- (1 \pm \beta_+ \beta_-)]/2$. In particolare, nel limite non relativistico ($\beta_{cm} \ll 1$) la velocità di annichilazione (4.3.3) diventa indipendente dalle funzioni di distribuzione delle cariche:

$$R_{\pm} = \frac{3}{8} n_+ n_- c \sigma_T. \quad (4.3.4)$$

Poichè in ogni singolo processo di annichilazione si ha una liberazione di energia pari a $(\gamma_+ + \gamma_-) m_e c^2$, l'emissività totale $4\pi j_A$, eguale anche alla *rate* di raffreddamento del gas Λ_A , viene calcolata mediando sulle distribuzioni termiche delle particelle, e risulta [†]

$$\Lambda_A = n_+ n_- m_e c^2 \int_1^{\infty} d\gamma_+ F_+(\gamma_+) \int_1^{\infty} d\gamma_- (\gamma_+ + \gamma_-) F_-(\gamma_-) \overline{v\sigma} \\ \approx n_+ n_- \frac{3m_e c^3 \sigma_T / 4}{1/(1 + 6\Theta) + \Theta / [\ln(1.123\Theta + 1) + 0.25]}. \quad (4.3.5)$$

[†] L'espressione approssimata (4.3.5) è stata ricavata da R.Svensson (Ap.J. 258, 321,1982) con un *best fit* basato sui risultati di un'integrazione numerica, ed è corretta al 2%.

La produzione e successiva annichilazione di positroni, sebbene siano importanti nel determinare il bilancio energetico di un plasma caldo, sono molto meno rilevanti per quanto riguarda l'aspetto dello spettro emesso. Infatti, nelle sorgenti celesti dove vi sono le condizioni ideali per la creazione di coppie, la formazione della "riga" a 511 keV è completamente mascherata dalla contemporanea esistenza di un certo numero di meccanismi radiativi, quali l'intensa emissione per Bremsstrahlung o la diffusione Compton, che ridistribuiscono l'energia dei fotoni nell'intera banda spettrale. Quelle poche osservazioni che mostrano una anomala emissione nell'intorno dei 500 keV hanno probabilmente un'origine diversa dall'annichilazione (Figura 4.6).

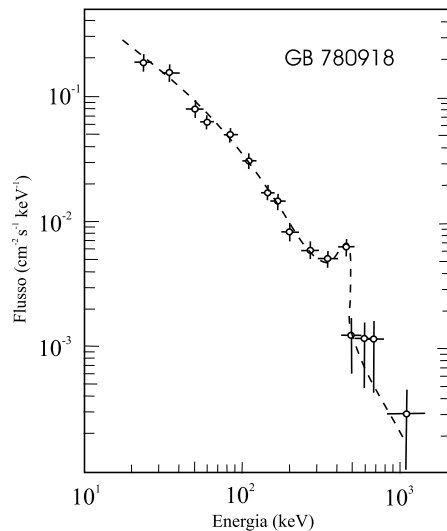


Figura 4.6 L'emissione peculiare osservata nella sorgente gamma GB780918 è stata interpretata da alcuni astronomi come riga dovuta all'annichilazione di coppie, attribuendo lo spostamento del massimo della riga verso i 400 keV ad un possibile effetto di redshift gravitazionale. Su questa interpretazione esistono però molti dubbi.

4.4 – Bremsstrahlung relativistico

Una carica accelerata dal campo coulombiano generato da un'altra carica emette radiazione elettromagnetica. Alle basse temperature l'interazione prevalente è quella tra elettroni e ioni, i cui effetti sono stati trattati nel primo Capitolo usando un approccio classico. Nell'approssimazione di dipolo l'emissione da particelle identiche è nulla, ma quando le velocità dei corpi interagenti sono molto elevate, gli effetti relativistici e quantistici sono tali da diminuire l'efficienza del processo $e-p$ mentre, contemporaneamente, aumentano l'importanza delle emissioni tra cariche identiche. In un gas molto caldo diventano competitive, se non addirittura prevalenti, le interazioni tra elettroni e, se sono presenti, tra positroni e elettroni e positroni. In questi casi non si può ignorare l'irraggiamento legato alle seguenti reazioni

$$e + e \rightarrow e + e + h\nu \quad (4.4.1a)$$

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + h\nu \quad (4.4.1b)$$

$$e + Z \rightarrow e + Z + h\nu \quad (4.4.1c)$$

dove e indica indifferentemente elettrone o positrone, mentre Z indica un protone p oppure uno ione più pesante. A causa della massa elevata, l'emissione dovuta alle interazioni ione-ione è in genere trascurabile, anche perchè le temperature alle quali queste particelle diventano relativistiche sono molto grandi ($T \gg 10^{12}$ K).

Lo stato finale dei processi (4.4.1) ha numerosi gradi di libertà, essendo composto da tre particelle. Oltre alla maggiore complessità delle sezioni d'urto, la necessità di eseguire una serie di integrazioni multiple sugli stati finali rende la risoluzione del problema ancora più complicata anche dal punto di vista numerico.

Le Figure 4.7*a,b,c* mostrano l'emissività spettrale dei tre processi fondamentali in funzione della frequenza e per diversi valori della temperatura. Le curve, che sono state ricavate numericamente, hanno andamenti qualitativamente simili tra loro, e differiscono soprattutto per quanto riguarda l'intensità. Questo comportamento è ancora più evidente nella Figura 4.7*d*, dove sono riportate le emissività integrate in frequenza (o *cooling rate*) in funzione della temperatura del gas. Le perdite radiative sono calcolate in rapporto al numero di coppie di particelle interagenti (sono cioè divise rispettivamente per i prodotti delle densità $n_e n_p$, n_e^2 e $n_+ n_-$).

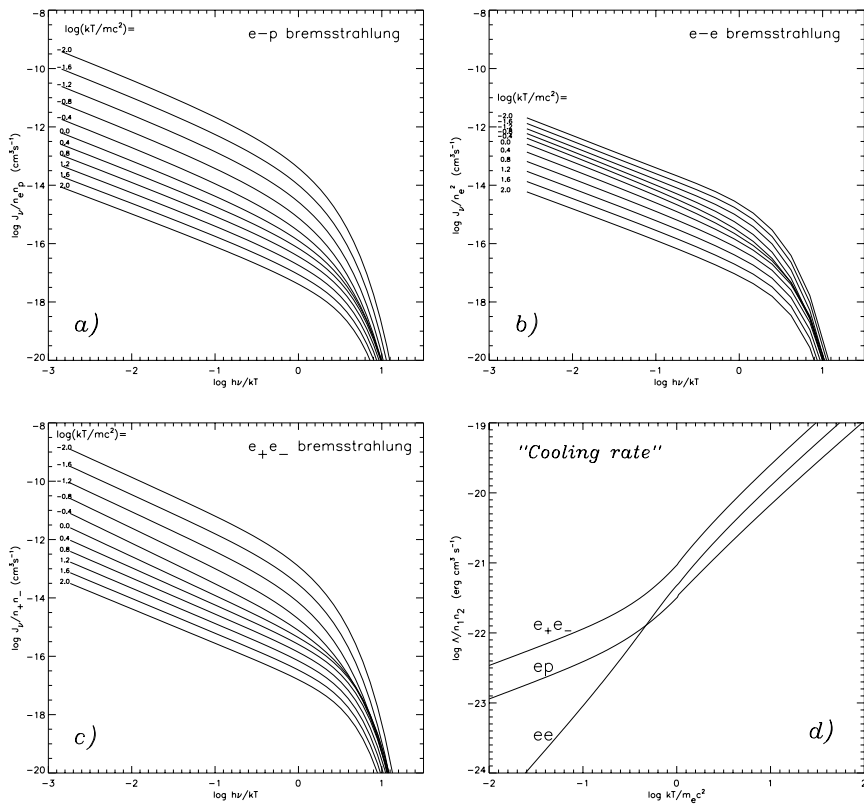


Figura 4.7 Emissività spettrale dei processi di Bremsstrahlung elettrone–protone (figura *a*), elettrone–elettrone (figura *b*), ed elettrone–positrone (figura *c*) in funzione della frequenza per diversi valori della temperatura. La figura *d*) mostra invece le corrispondenti emissività integrate in frequenza (o *cooling rate*) in funzione della temperatura.

A tutte le temperature il raffreddamento più efficace avviene in seguito all'interazione tra elettrone–positrone. In questo caso, infatti, sono contemporaneamente verificate le condizioni di piccola massa e la presenza di cariche distinte. Tuttavia la reale importanza del processo dipende in maniera critica dalla densità numerica di positroni, che deve essere almeno paragonabile a quella degli elettroni. Evidentemente questa situazione si verifica solo se il plasma è sufficientemente caldo e denso.

Nonostante la complessità degli integrali, esistono alcune espressioni analitiche delle emissività per Bremsstrahlung valide nei limiti non relativistico (NR) o estremo relativistico (ER). Ad esempio, per la *rate* di raffreddamento

$\Lambda = 4\pi j$ spesso vengono usate le seguenti formule approssimate [†]

$$\Lambda_{ep}^{NR} = (n_+ + n_-)n_p \frac{32}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} m_e c^3 \alpha_f r_e^2 \sqrt{\Theta} \times [1 + 1.781\Theta^{1.34}] \quad (\alpha^2 \ll \Theta < 1) \quad (4.4.2)$$

$$\Lambda_{ep}^{ER} = 12(n_+ + n_-)n_p m_e c^3 \alpha_f r_e^2 n_e n_p \Theta \times [\ln(2\eta\Theta) + 3/2] \quad (\Theta \geq 1) \quad (4.4.3)$$

$$\Lambda_{ee}^{NR} = (n_+^2 + n_-^2) \frac{20(44 - 3\pi^2)}{9\sqrt{\pi}} m_e c^3 \alpha_f r_e^2 n_e^2 \Theta^{3/2} \times [1 + 1.1\Theta + \Theta^2 - 1.25\Theta^{2.5}] \quad (\alpha^2 \ll \Theta < 1) \quad (4.4.4)$$

$$\Lambda_{ee}^{ER} = 24(n_+^2 + n_-^2) m_e c^3 \alpha_f r_e^2 n_e^2 \Theta \times [\ln(2\eta\Theta) + 5/4] \quad (\Theta \geq 1) \quad (4.4.5)$$

$$\Lambda_{e_+e_-}^{NR} = n_+ n_- \frac{128}{3\sqrt{\pi}} m_e c^3 \alpha_f r_e^2 \sqrt{\Theta} \times [1 + 1.7\Theta^{1.5}] \quad (\alpha^2 \ll \Theta < 1) \quad (4.4.6)$$

$$\Lambda_{e_+e_-}^{ER} = 48 n_+ n_- m_e c^3 \alpha_f r_e^2 \Theta \times [\ln(2\eta\Theta) + 5/4] \quad (\Theta \geq 1) \quad (4.4.7)$$

dove $\alpha_f = 2\pi e^2/hc = 1/137$ è la costante di struttura fine, $\eta = \exp(-\gamma_E) \approx 0.562$ è l'esponenziale della costante di Eulero γ_E , e $\Theta = kT/m_e c^2$.

Si osservi che nel limite relativistico, a parte per il debole fattore logaritmico, l'emissione per coppia di particelle $\Lambda/n_1 n_2$ del processo e_+e_- è doppia rispetto alla emissione $e-e$ e quadrupla rispetto a $e-p$. Ciò è dovuto al tendere della sezione d'urto dei tre processi verso la medesima espressione, assieme agli effetti di particelle identiche. Inoltre nell'interazione $e-p$ solo l'elettrone irradia efficacemente, mentre negli altri due casi entrambe le particelle irradiano.

[†] Svensson R., Ap.J. 258, 335, 1982.