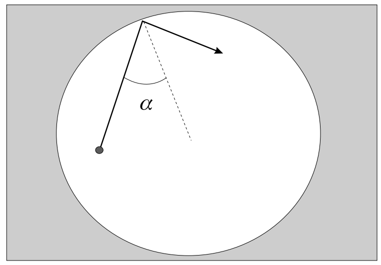
Esercizi sul Capitolo 4

4.1 (§4.2) La temperatura e la densità medie dell'idrogeno neutro interstellare sono rispettivamente $T = 200$ K e $n = 10\,\mathrm{cm}^{-3}$. Calcolare per quale valore della massa e del raggio una nube diventa gravitazionalmente instabile (*Massa di Jeans*).



4.2 (§4.5) Si consideri il semplice modello microscopico illustrato in figura, formato da un recipiente sferico di raggio R contenente un numero N molto grande di particelle relativistiche. Ogni particella ha un momento (medio) $q = (E^2 - m^2c^4)^{1/2}/c \approx E/c$ e nella collisione elastica con la parete la sua variazione di momento è $|\Delta \mathbf{q}| = 2q\cos\alpha$, dove α è l'angolo di incidenza. Dimostrare che vale l'equazione di stato $p = u/3$ tra la pressione p e la densità di energia interna u.

4.3 (§4.5) Scrivere le equazioni di stato di una miscela di protoni non relativistici e di elettroni relativistici non degeneri. Trovare l'esponente adiabatico e la velocità del suono.
4.4 (§4.5) Calcolare il peso molecolare medio di una miscela completamente ionizzata composta da idrogeno, elio ed elementi pesanti le cui frazioni in massa sono rispettivamente $X = 0.6$, $Y = 0.35$ e $1 - X - Y = 0.05$. Si assuma che gli elementi pesanti producano mediamente un elettrone ogni due barioni.
4.5 (§4.6) Ricavare l'espressione del potenziale chimico $\mu(n_e, T)$ di un gas maxwelliano di elettroni nei limiti $kT \ll m_e c^2$ e $kT \gg m_e c^2$.
4.6 (§4.6) Si consideri il processo termico di produzione di coppie $\gamma + \gamma \rightleftharpoons e^+ + e^-$.
a) Trovare la relazione tra i potenziali chimici μ_+ e μ_- degli elettroni e dei positroni in equilibrio termico (si tenga presente che, in queste condizioni, il potenziale chimico della radiazione è nullo).
b) Ricavare il prodotto $n_+ n_-$ tra le densità delle due specie.
4.7 (§4.7) Dimostrare che l'entalpia media di una particella degenere è eguale all'energia di Fermi.
4.8 (§4.7) Calcolare il rapporto tra le pressioni degli elettroni e degli ioni in un gas di elio che ha densità $\rho_0 = 10^6$ g/cm^3 e temperatura $T = 10^6$ K.
4.9 (§4.8) In base al principio d'indeterminazione, il momento q e la regione $d \approx \rho/m_p$ entro la quale i fermioni sono confinati debbono soddisfare alla diseguaglianza $q\,d \gtrsim \hbar$. La degenerazione inizia quando l'energia termica kT degli elettroni (che supponiamo non relativistici) è inferiore all'energia $E = q^2/2m_e$. Partendo da queste considerazioni, calcolare la temperatura al di sotto della quale il gas di fermioni diventa degenere.
4.10 (§4.9) L'azione ionizzante della pressione può essere interpretata prendendo in esame l'energia $E = q^2/2m_e - Ze^2/r$ di un elettrone (non relativistico) di momento q, legato ad un atomo di carica Ze dimensione media r. Tenendo presente che per il principio di indeterminazione vale la relazione $q\,d_e \gtrsim \hbar$, dove $d_e^3 \approx r^3/Z$ è il volume che ciascun elettrone ha a disposizione nell'atomo, trovare la densità oltre la quale l'atomo viene ionizzato.