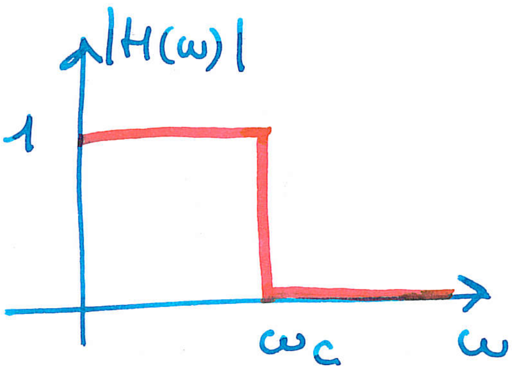
FILTRI e AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

Un filtro è un circuito che processa segnali e produce una risposta che dipende dalla loro frequenza. La sua risposta in frequenza è caratterizzata dalla funzione di trasferimento $H(j\omega)$ con $\omega = 2\pi f$, frequenza angolare e j unità immaginaria. La risposta viene caratterizzata da una risposta in ampiezza, $|H(j\omega)|$ e da una risposta in fase $\measuredangle H(j\omega)$ che forniscono rispettivamente il guadagno e lo sfasamento per un segnale AC che attraversa il filtro.

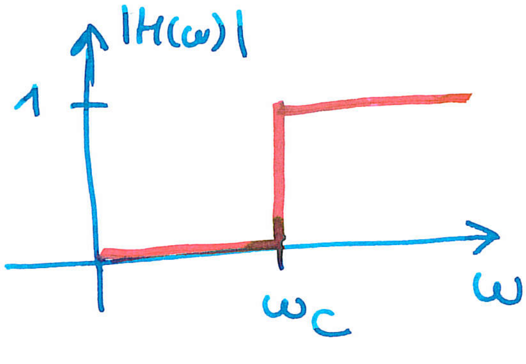
A seconda della risposta in frequenza, i filtri vengono classificati in:

- passa basso (low pass);
- passa alto (high pass);
- passa banda (band pass);
- taglia banda (band reject).

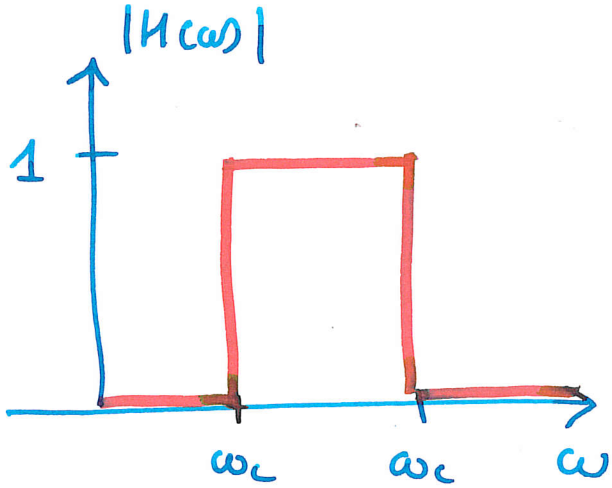
Il filtro passa basso è caratterizzato da una frequenza di taglio, ω_c, tale che $|H| = 1$ per $\omega < \omega_c$ e $|H| = 0$ per $\omega > \omega_c$



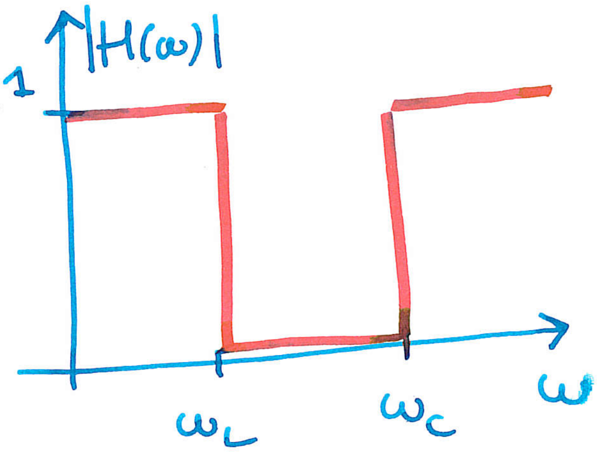
Nel filtro passa alto, la situazione è rovesciata: $|H| = 0$ per $\omega < \omega_c$, mentre $|H| = 1$ per $\omega > \omega_c$



Il filtro passa banda è caratterizzato da una regione in frequenza $\omega_L < \omega < \omega_H$ all'interno della quale il segnale è inalterato; mentre all'esterno è soppresso.



Infine il filtro taglia banda è complementare al passa-banda e sopprime il segnale che si trova all'interno di una regione definita, facendo passare quello all'esterno.



I filtri costruiti esclusivamente con resistenze, capacità e induttanze (filtri RLC) sono chiamati filtri passivi; quelli invece realizzati con gli operazionali sono chiamati filtri attivi.

LA FUNZIONE di TRASFERIMENTO

Per studiare la risposta di circuiti con elementi quali capacità e induttanze, oltre alle resistenze, cioè che possiedono una risposta dipendente dalla frequenza del segnale che li attraversa, useremo le impedenze complesse

$Z_L = sL$ per le induttanze

$Z_C = \dfrac{1}{sC}$ per le capacità

e $\quad Z_R = R \quad$ per le resistenze.

Dove $s = \sigma + j\omega$ indica la frequenza complessa.
Il comportamento di un circuito è determinato univocamente dalla funzione di trasferimento $H(s)$ che è data dal rapporto

$$H(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)},$$

dove $X_i(s) = \mathcal{L}\{x_i(t)\}$ è la trasformata di Laplace del segnale in ingresso. Una volta nota $H(s)$, possiamo calcolare la risposta $x_o(t)$ del circuito ad un particolare input $x_i(t)$ come

$$x_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot X_i(s)\}$$

Dove il simbolo $\mathcal{L}^{-1}$ indica la trasformata inversa di Laplace.
Le funzioni di trasferimento dei circuiti elettrici sono rapporti di polinomi a coefficienti reali

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

Il grado del denominatore determina l'ordine del filtro. Le radici delle equazioni $N(s) = 0$ e $D(s) = 0$ sono chiamate, rispettivamente, zeri e poli e sono indicate con le lettere z_i e p_i.

Pertanto la funzione di trasferimento può essere riscritta come

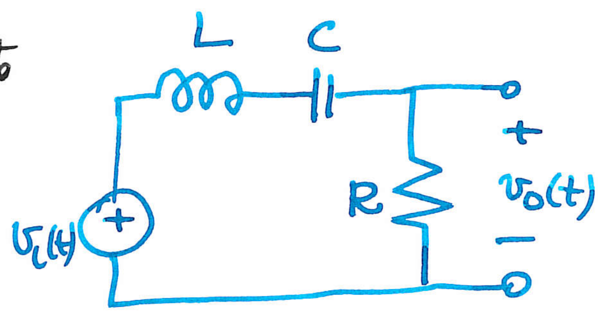
$$H(s) = H_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Con $H_0 = \frac{a_m}{b_n}$, fattore di scala.

Zeri e poli possono essere reali o complessi; quando sono complessi sono sempre in coppia coniugata. Se $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ è un polo, lo è anche $p_k^* = \sigma_k - j\omega_k$.
Vengono solitamente rappresentati nel piano complesso, s, indicando gli zeri con la lettera 'o' e i poli con la lettera 'x'. Semplicemente studiando la posizione degli zeri e dei poli, un ingegnere può predire caratteristiche importanti del circuito come la stabilità e la risposta in frequenza.

ESERCIZIO

Calcolare la funzione di trasferimento del circuito e determinare gli zeri e i poli.



Assumere $L = 5\,mH$
$C = 40\,\mu F$
$R = 10\,\Omega$

Per il partitore di tensione su R avremo (nel campo delle frequenze complesse, s):

$$V_0(s) = \frac{R}{sL + \frac{1}{sC} + R} V_L(s)$$

e pertanto

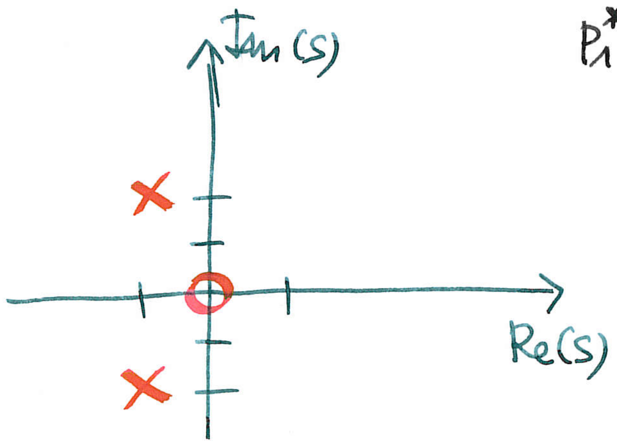
$$H(s) = \frac{V_0}{V_L} = \frac{RCs}{1 + RCs + LCs^2} = \frac{R\cancel{C}}{L\cancel{C}} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{R}{L} = \frac{10}{5\,10^{-3}} = 2\,10^{3} \; ; \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{5\,10^{-3} \times 40\,10^{-6}} = 5\,10^{6}$$

$$H(s) = 2\,10^{3} \cdot \frac{s}{s^2 + 2 \cdot 10^{3} s + 5\,10^{6}} = 2\,10^{3} \frac{s}{[s - (-1+j2)10^{3}][s - (-1-j2)10^{3}]}$$

La funzione ha $H_0 = 2\,10^{3}\ V/V$, uno zero nell'origine e due poli complessi coniugati $p_1 = (-1+j2)10^{3}$

$p_1^* = (-1-j2)10^{3}$



Normalmente la funzione di trasferimento viene espressa in un'espansione come somma di frazioni.
Nel caso in cui i poli siano reali e distinti scriveremo

$$H(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

I coefficienti A_k sono anche chiamati residui di $H(s)$ e vengono calcolati con la relazione

$$A_k = (s-p_k)\,H(s)\Big|_{s=p_k}$$

Sfruttando le proprietà di linearità della trasformata di Laplace, e il fatto che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}u(t)$$

con $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Possiamo scrivere la trasformata di Laplace della funzione di trasferimento con n poli reali e distinti come

$$h(t) = \left(A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}\right) u(t)$$

Nel caso in cui i poli siano complessi coniugati $p_1 = \alpha + j\beta$ e $p_1^* = \alpha - j\beta$, il denominatore conterrà la forma quadratica $(s-p_1)(s-p_1^*) = (s-\alpha)^2 + \beta^2$

Con un singolo polo complesso coniugato, (la estensione a più poli complessi è banale), avremo

$$H(s) = \frac{A_1}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{A_1^*}{s-(\alpha-j\beta)}$$

Per ricavare i coefficienti, scriviamo

$$A_1 = [s-(\alpha+j\beta)]H(s)\Big|_{\alpha+j\beta} = \frac{N(\alpha+j\beta)}{2j\beta}$$

e

$$A_1^* = [s-(\alpha-j\beta)]H(s)\Big|_{\alpha-j\beta} = \frac{N(\alpha-j\beta)}{-2j\beta}$$

A_1 e A_1^* sono proprio uno il complesso coniugato dell'altro e pertanto è sufficiente il calcolo di uno dei due.

Dato che $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{A_1^*}{s-(\alpha-j\beta)}\right\} = 2|A_1|e^{\alpha t}\cos(\beta t + \measuredangle A_1)u(t)$$

ESERCIZIO

Calcolare la trasformata di Laplace (inversa) della seguente funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{40(s+1)}{(s+5)(s^2+6s+25)}$$

La funzione ha un polo reale $p_1 = -5$ e due complessi coniugati $p_2 = -3+j4$ e $p_2^* = -3-j4$

Scrivendola come somma di frazioni dovremo determinare i coefficienti A_n di

$$H(s) = \frac{A_1}{s+5} + \frac{A_2}{s-(-3+j4)} + \frac{A_2^*}{s-(-3-j4)}$$

$$A_1 = (s+5)H(s)\Big|_{s=-5} = \frac{40(s+1)}{(s^2+6s+25)}\Big|_{s=-5} = \frac{-160}{25-30+25} = -\frac{\cancel{160}^{8}}{\cancel{20}}$$

$$\boxed{A_1 = -8}$$

$$A_2 = (s+3-j4)H(s)\Big|_{s=-3+j4} = \frac{40(s+1)}{(s+5)(s+3+j4)}\Big|_{s=-3+j4}$$

$$= \frac{40(-3+j4+1)}{(-3+j4+5)(\cancel{-3}+j4\cancel{+3}+j4)}$$

$$= \frac{\cancel{40}^{5}(-2+j4)}{(2+j4)\,j\cancel{8}} = 5\,\frac{-2+j4}{-4+j2}$$

$A_2 = 4-j3$

e $A_2^* = 4+j3$

La trasformata di Laplace sarà pertanto

$$h(t) = -8\,e^{-5t}u(t) + 10\,e^{-3t}\cos(4t - 36{,}87°)\,u(t)$$

$$\measuredangle A_2 = \operatorname{atan}\frac{3}{4} = 36{,}87°$$

Come ultima cosa consideriamo il caso di poli reali ripetuti (cioè con molteplicità maggiore di uno).
Consideriamo il caso di un polo a $s=p$ con molteplicità r. Il denominatore della funzione di trasferimento conterrà il termine $(s-p)^r$.
L'espansione in frazioni parziali che tutte le potenze di $(s-p)$, da 1 fino a r, siano presenti

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s-p)^r} = \frac{A_r}{(s-p)^r} + \frac{A_{r-1}}{(s-p)^{r-1}} + \dots + \frac{A_1}{(s-p)}$$

Una volta determinati i residui $A_1, \dots A_r$, si sfrutta la proprietà

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^k}\right\} = \frac{t^{k-1}e^{-at}}{(k-1)!}\,u(t)$$

per scrivere

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \left[\frac{A_r t^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + A_2 t + A_1\right]e^{pt}u(t)$$

E per determinare i residui avere,

$$A_r = (s-p)^r H(s)\Big|_{s=p}$$

Per calcolare A_{r-1}, moltiplichiamo ancora $H(s)$ per $(s-p)^r$, ma poi ne prendiamo la derivata, in modo da eliminare la costante A_r

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds}(s-p)^r H(s)\Big|_{s=p}$$

La procedura può essere generalizzata per ottenere

$$A_i = \frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}(s-p)^r H(s)\Big|_{s=p}$$

ESERCIZIO

Calcolare la trasformata di Laplace inversa della seguente funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{8(s+2)}{(s+1)^3(s+3)}$$

La funzione ha due poli: $p_1 = -1$ con molteplicità 3 e $p_2 = -3$ con molteplicità 1.

L'espansione in frazioni parziali è

$$H(s) = \frac{A_{1,3}}{(s-1)^3} + \frac{A_{1,2}}{(s-1)^2} + \frac{A_{1,1}}{(s-1)} + \frac{A_2}{s+3}$$

Calcoliamo i residui:

$$A_{1,3} = (s+1)^3 \cdot H(s)\Big|_{s=-1} = \frac{8(s+2)}{(s+3)}\Big|_{s=-1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$A_{1,2} = \frac{d}{ds}\,\frac{8(s+2)}{s+3}\Big|_{s=-1} = \frac{8(s+3)-8(s+2)}{(s+3)^2}\Big|_{s=-1} = \frac{8}{(s+3)^2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\,\frac{8}{(s+3)^2}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}\,\frac{-16}{(s+3)^3}\Big|_{s=-1} = -1$$

$$A_2 = (s+3)\,H(s)\Big|_{s=-3} = \frac{8(s+2)}{(s+1)^3}\Big|_{s=-3} = +1$$

Pertanto la trasformata inversa di Laplace sarà

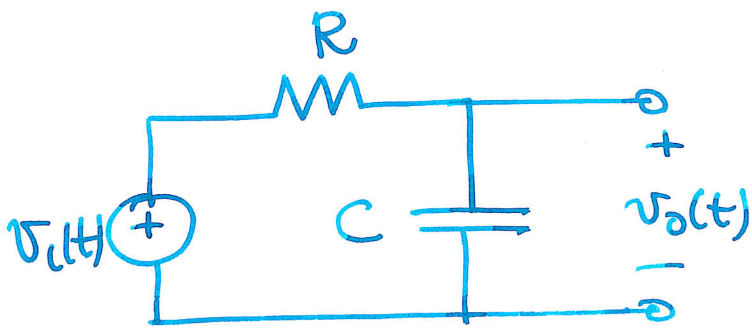
$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \left[(4t^2+2t-1)\,e^{-t} + e^{-3t}\right] u(t)$$

—— o ——

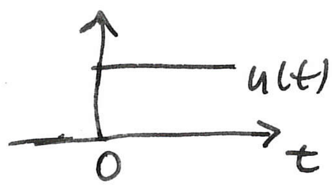
In maniera analoga è possibile trattare poli complessi con molteplicità maggiore di uno.

Un circuito è stabile se fornisce un output limitato in risposta ad una sollecitazione limitata. Un metodo per studiare la stabilità è di iniettare un segnale impulsivo, del tipo δ di Dirac attraverso una resistenza e studiare la risposta del circuito in assenza sorgenti esterne. La risposta del circuito è chiamata 'source-free' o risposta naturale. Dato che la trasformata di Laplace della δ di DIRAC è 1, è sufficiente studiare l'anti-trasformata di Laplace della funzione di trasferimento $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.
Affinché il circuito sia stabile, tutti i poli devono stare nel semipiano $\sigma < 0$.

ESERCIZIO



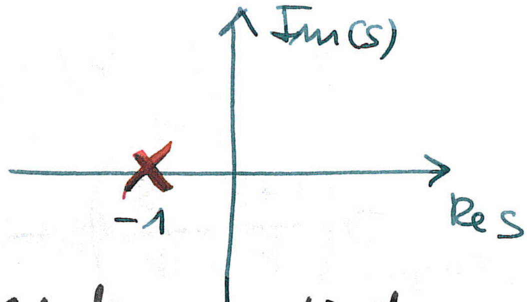
Dato il circuito, determinare la funzione di trasferimento e la risposta ad un impulso del tipo $u(t)$



$R = 1\Omega$
$C = 1F$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1+RCs} = \frac{1}{1+s}$$

Il circuito ha un polo reale a -1



Calcoliamo ora la risposta al segnale indicato

$$V_i(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\cancel{V_o(t)} \quad V_o(s) = H(s)\,V_i(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}$$

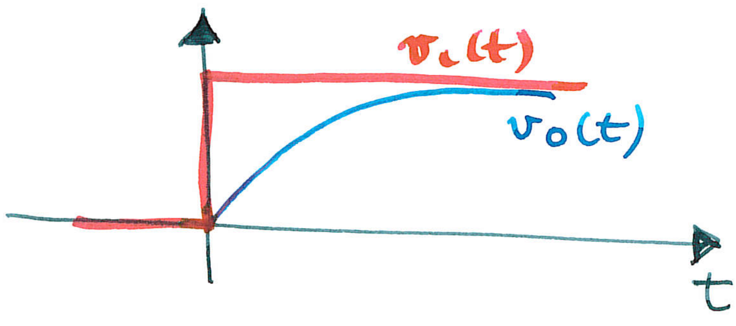
$$A_1 = s\,H(s)\Big|_{s=0} = 1$$

$$A_2 = (s+1)\,H(s)\Big|_{s=-1} = -1$$

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

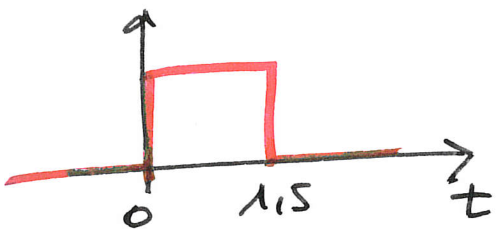
Quindi

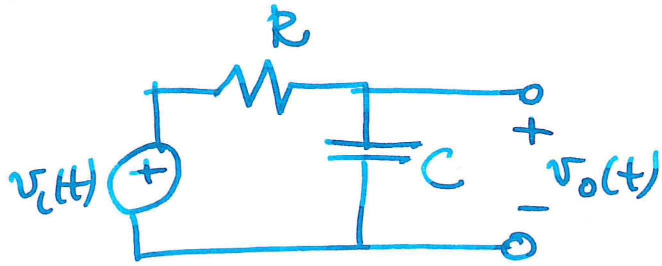
$$v_o(t) = u(t) - e^{-t}u(t) = (1 - e^{-t})\,u(t)$$



ESERCIZIO

Studiare la risposta dello stesso circuito di prima ad un'onda quadra $u(t)-u(t-1{,}5)$





La funzione di trasferimento del circuito è $H(s)=\frac{1}{s+1}$

Per studiare l'effetto dell'onda quadra in ingresso, calcoliamo la trasformata di Laplace.

$$\mathcal{L}\{u(t)-u(t-1{,}5)\}=\mathcal{L}\{u(t)\}-\mathcal{L}\{u(t-1{,}5)\}$$

Sfruttando la proprietà di sfasamento temporale della trasformata

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

avremo

$$V_o(s)=H(s)V_i(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-1{,}5s}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-1{,}5s}$$

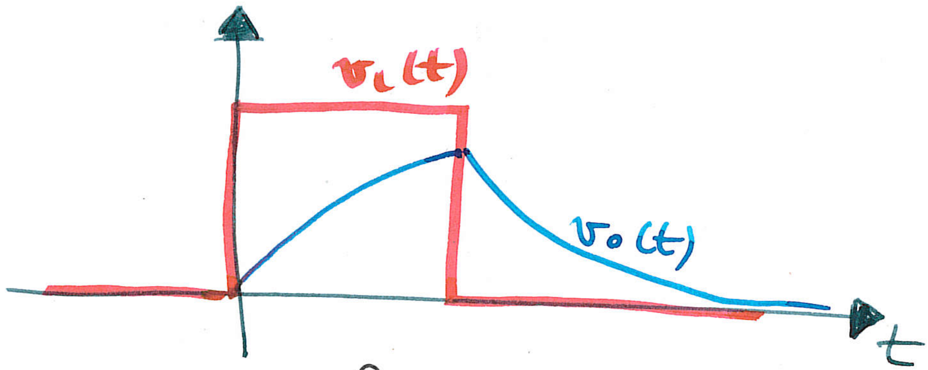
Il primo termine ci fornisce $(1-e^{-t})u(t)$

Per il secondo applichiamo la proprietà di time-shifting al contrario e otteniamo

$$\left(1-e^{-(t-1,5)}\right)u(t-1,5)$$

Pertanto la soluzione completa sarà

$$v_0(t) = \left(1-e^{-t}\right)u(t) - \left(1-e^{-(t-1,5)}\right)u(t-1,5)$$



Per lo studio dei filtri siamo interessati a verificare la risposta a segnali in ingresso del tipo

$$x_i(t) = X_{im}\cos(\omega t + \theta_i)$$

In generale, la risposta del circuito, $x_0(t)$ sarà composta da una parte di transiente ed una parte stazionaria (steady-state component), con la stessa frequenza in ingresso, ma con possibili valori diversi per l'ampiezza e la fase

Se i poli del filtro sono tutti nel semipiano negativo ($\sigma<0$) della frequenza complessa, la componente transiente andrà ad esaurirsi e rimarrà solamente la parte stazionaria, in modo da avere segnali del tipo

$$x_o(t) = X_{om} \cos(\omega t + \theta_o)$$

In questo caso è possibile saltare la procedura di trasformata inversa di Laplace e calcolare $H(s)$ sull'asse immaginario. Per far questo prendiamo il limite $s \to j\omega$ e calcoliamo i parametri come segue:

$$X_{om} = |H(j\omega)| \times X_{im}$$

$$\theta_o = \measuredangle H(j\omega) + \theta_i$$

dove se $H = H_r + jH_i$ $\quad |H| = \sqrt{H_r^2 + H_i^2}$

$$\measuredangle H = \operatorname{atan} \frac{H_i}{H_r} \quad \text{se } H_r > 0$$

$$\measuredangle H = \pi - \operatorname{atan} \frac{H_i}{H_r} \quad \text{se } H_r < 0$$

inoltre valgono le proprietà

$$|H_1 \times H_2| = |H_1| \times |H_2|$$

$$\measuredangle (H_1 H_2) = \measuredangle H_1 + \measuredangle H_2$$

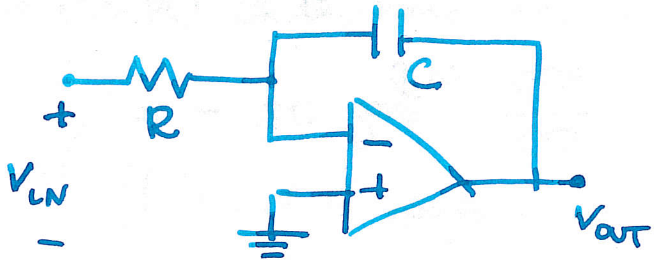
$$\left| \frac{H_1}{H_2} \right| = \frac{|H_1|}{|H_2|}$$

$$\measuredangle \left(\frac{H_1}{H_2} \right) = \measuredangle H_1 - \measuredangle H_2$$

FILTRI ATTIVI del I ORDINE

I filtri attivi più semplici si ottengono utilizzando una capacità come componente esterna della rete del circuito.

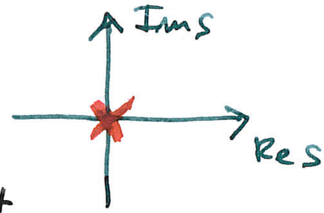
Consideriamo il circuito seguente:



Calcoliamo la funzione di trasferimento

$$\frac{V_{OUT}}{\frac{1}{sC}} = \frac{-V_{IN}}{R} \Rightarrow \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = H(s) = -\frac{1}{RCs}$$

Il circuito ha un polo nell'origine.



Studiamo il suo comportamento per input periodici stazionari. Quindi $s \to j\omega$

$$H(j\omega) = -\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_0}} = \frac{j}{\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} \angle 90^\circ \qquad \text{con } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Il circuito introduce uno sfasamento di 90° alla fase del segnale in ingresso e si comporta come un filtro passa basso.

Per ordinare un grafico di Bode del filtro, consideriamo le grandezze

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H|$$

ricordando che per le proprietà dei logaritmi

$$|H_1 \times H_2|_{db} = |H_1|_{db} + |H_2|_{db}$$

$$\left|\frac{H_1}{H_2}\right|_{db} = |H_1|_{db} - |H_2|_{db}$$

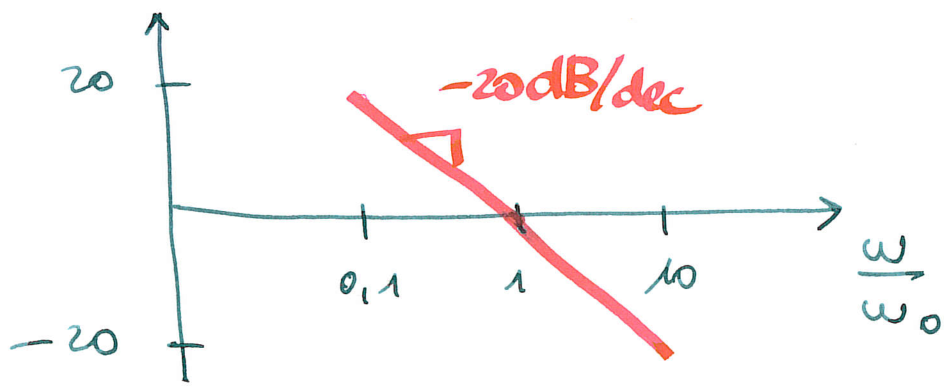
e $$\frac{1}{|H|_{db}} = -|H|_{db}$$

Ritornando al nostro circuito, avremo

$$|H|_{db} = 20 \log_{10} |H| = 20 \log_{10} \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$= -20 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$$

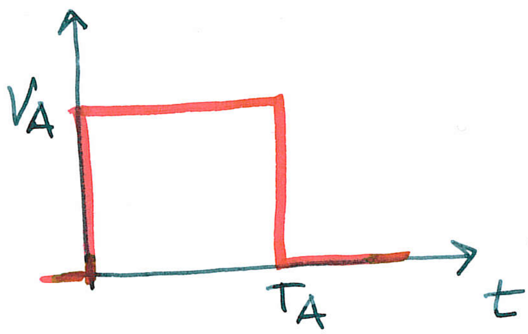
con il seguente plot di Bode



Il circuito si comporta anche come un integratore.
Questo si vede dal fatto che $H(s) = -\frac{1}{RCs}$
e per una delle proprietà delle trasformate di Laplace che afferma che una divisione per s nel campo delle frequenze corrisponde ad una integrazione nel dominio dei tempi

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

Per completare, studiamo la risposta del circuito ad un impulso quadrato $v_{IN}(t) = V_A\left[u(t) - u(t-T_A)\right]$ con $T_A > 0$.



La trasformata di Laplace del segnale in ingresso è

$$V_{IN}(s) = \mathcal{L}\left\{V_A\left[u(t) - u(t-T_A)\right]\right\}$$

$$= \frac{V_A}{s} - \frac{V_A}{s}e^{-T_A s}$$

(dove abbiamo usato la proprietà delle trasformate di Laplace: $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\cdot F(s)$

con $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$$V_{OUT}(s) = H(s)V_{IN}(s) = -\frac{1}{RCs}\left[\frac{VA}{s} - \frac{VA}{s}e^{-T_A s}\right]$$

$$= -\frac{VA}{RC}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{VA}{RC}\frac{1}{s^2}e^{-T_A s}$$

$$v_{OUT}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_{out}(s)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

$$= -\frac{VA}{RC}t\cdot u(t) + \underbrace{\frac{VA}{RC}(t-T_A)\,u(t-T_A)}$$

qui abbiamo riutilizzato la proprietà

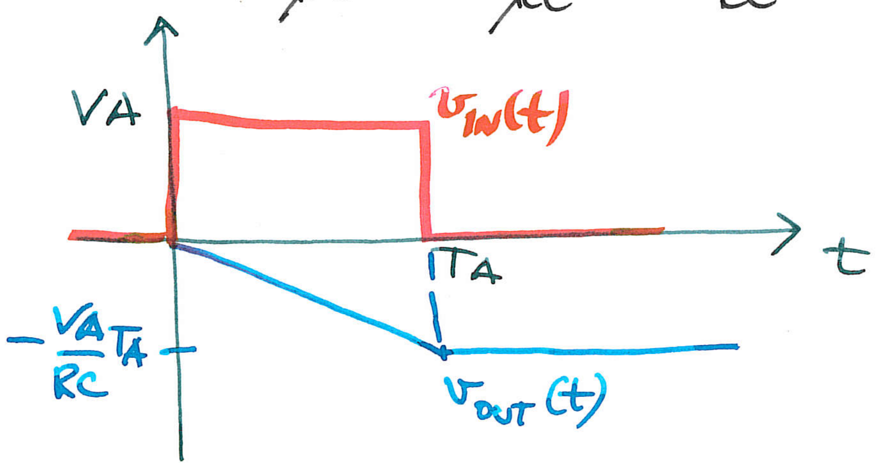
$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

Quindi, per $0<t<T_A$

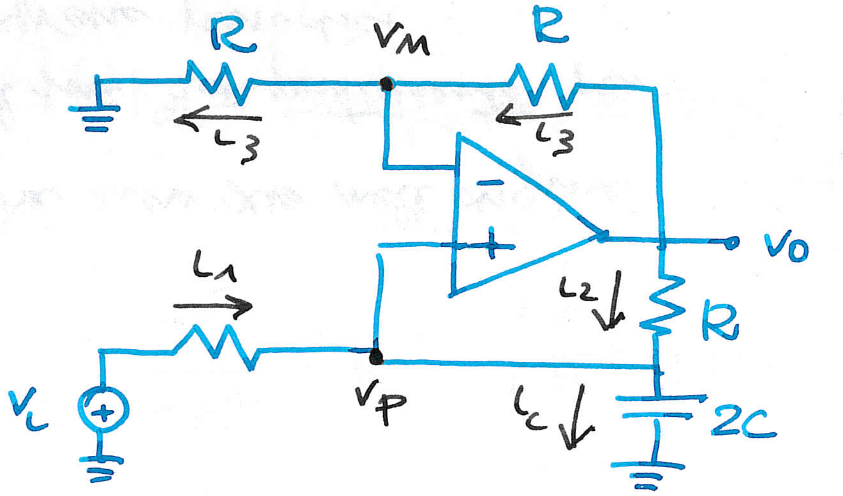
$$v_{OUT}(t) = -\frac{VA}{RC}\cdot t$$

mentre per $t \geq T_A$

$$v_{OUT}(t) = -\cancel{\frac{VA}{RC}t} + \cancel{\frac{VA}{RC}t} - \frac{VA}{RC}T_A = -\frac{VA}{RC}T_A$$



Un altro circuito, integratore non invertente è il seguente:



$$Z_c = \frac{1}{2Cs}$$

in v_P

$$i_1 + i_2 = i_c \rightarrow \frac{V_i - V_P}{R} + \frac{V_o - V_P}{R} = \frac{V_P}{Z_c}$$

in v_M

$$\frac{V_o - V_M}{R} = \frac{V_M}{R} \rightarrow V_o = 2V_M$$

quindi $v_M = v_P = \frac{V_o}{2}$

Sostituendo nell'eq. precedente:

$$\frac{V_i}{R} - \frac{2V_P}{R} + \frac{V_o}{R} = \frac{V_P}{Z_c}$$

$$\frac{V_i}{R} - V_P\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{Z_c}\right) + \frac{V_o}{R} = 0$$

$$\frac{V_i}{R} - \cancel{\frac{V_o}{R}} - \frac{V_o}{2Z_c} + \cancel{\frac{V_o}{R}} = 0$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{2Z_c}{R} = \frac{1}{RCs}$$

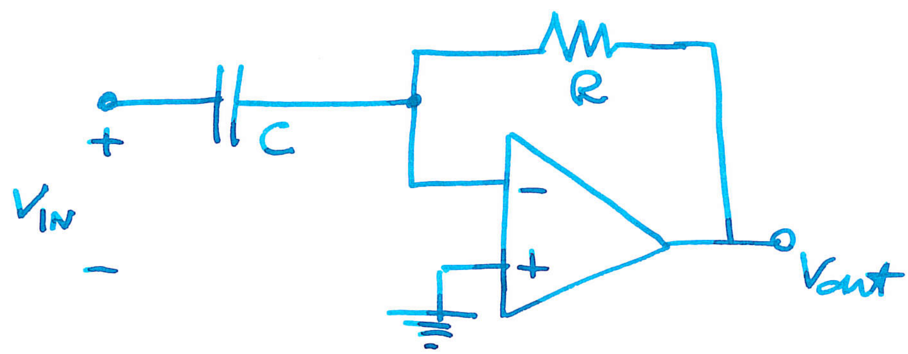
Ha un polo nell'origine

Studiamo la risposta stazionaria del filtro,
con $s \to j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega} = \frac{-j}{\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} \angle -90^\circ$$

L'ampiezza è la stessa del circuito precedente, mentre cambia la fase che passa da $+90^\circ$ a -90°.

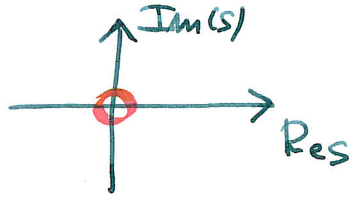
Invertiamo ora la posizione della capacità e della resistenza studiando il circuito seguente:



Determiniamo la funzione di trasferimento:

$$\frac{V_{OUT}}{R} = \frac{-V_{IN}}{Z_C} \rightarrow \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = H(s) = -\frac{R}{Z_C} = -RCs$$

Il circuito ha uno zero nell'origine

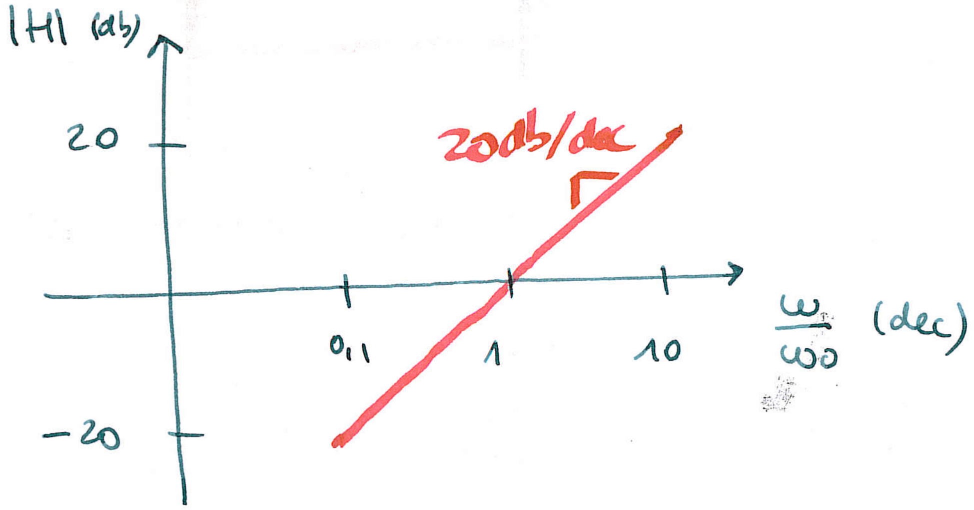


Studiamo il suo comportamento per segnali di ingresso periodici

$$H(j\omega) = -j\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \angle -90^\circ$$

Il circuito si comporta come un filtro passa alto
Realizziamo il grafico di Bode

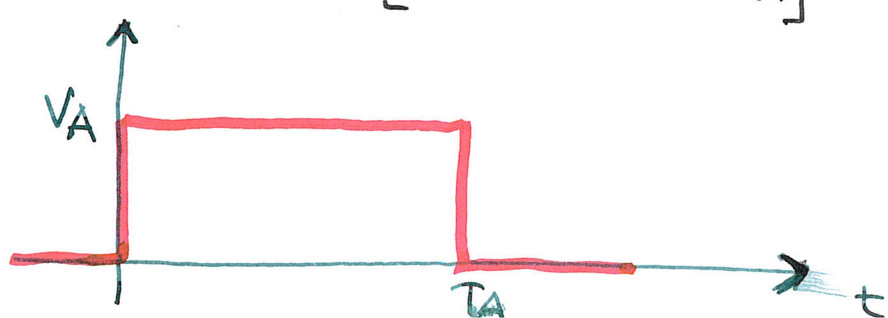
$$|H|_{db} = 20\log_{10}|H| = 20\log_{10}\frac{\omega}{\omega_0}$$



Inoltre il circuito si comporta come un derivatore.
Per una proprietà delle trasformate di Laplace,
moltiplicare per s nel campo delle frequenze equivale
a derivare la funzione nel dominio dei tempi

$$\frac{df}{dt} \longleftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

Per completare, valutiamo la risposta del circuito
ad un impulso $V_{IN} = V_A\left[u(t) - u(t-T_A)\right]$



La trasformata di Laplace dell'impulso in ingresso è

$$V_{IN}(s) = \frac{V_A}{s} - \frac{V_A}{s} e^{-T_A s}$$

Calcoliamo la tensione in uscita come

$$V_{OUT}(s) = H(s) V_{IN}(s)$$

$$= -RCs\left[\frac{V_A}{s} - \frac{V_A}{s} e^{-T_A s}\right]$$

$$= -RCV_A + RCV_A e^{-T_A s}$$

dato che $\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t)$

e $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$

Quindi

$$v_{OUT}(t) = -RCV_A \delta(t) + RCV_A \delta(t-T_A)$$