Padova, 26 marzo 2001

Versione 1.0

Esperienze di ottica ondulatoria

Esperimentazioni di Fisica II

(G.Busetto, R.Onofrio)

Richiami di ottica ondulatoria ed esperienze

Propagazione dell'energia sotto forma di onde

Energia ed impulso possono essere trasferiti tra punti ed/o oggetti nello spazio-tempo mediante lo spostamento di oggetti materiali, detti corpuscoli (come nel caso degli urti), oppure mediante l'utilizzo di campi, cioè di grandezze definibili e misurabili in ogni punto dello spazio-tempo con determinate leggi di trasformazione tra diversi sistemi di riferimento. Esempi di campi sono temperatura, pressione, densità, nel qual caso essendo individuati da numeri prendono il nome di campi scalari, o deformazioni, velocità, forze, ecc, (campi vettoriali). L'onda è la propagazione, a velocità finita, della perturbazione di un campo. Per campi scalari l'onda è definita dalla direzione di propagazione che coincide punto per punto con il vettore velocità di propagazione, mentre nel caso di campi vettoriali occorre anche specificare la direzione lungo la quale giace la perturbazione. Nel caso più semplice di campo scalare unidimensionale, o per ciascuna delle componenti di un campo vettoriale $\psi(x,t)$, l'onda soddisfa ad una equazione lineare a derivate parziali nel tempo e nello spazio:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

che ha per soluzione una qualunque combinazione lineare delle due funzioni generiche $f(x-vt)$ e $g(x+vt)$. Un caso di particolare importanza è dato dalle funzioni trigonometriche del tipo:

$$f(x-vt) = \psi_0 \sin(\omega t - 2\pi x/\lambda + \phi) \tag{2}$$

ove si è introdotta la pulsazione o frequenza angolare ω, la lunghezza d'onda λ e la fase ϕ, le prime essendo legate dalle relazioni:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = 2\pi\frac{v}{\omega}. \tag{3}$$

Le onde descritte dalle funzioni trigonometriche come la (2) presentano particolare interesse in quanto è possibile scomporre qualsiasi altra forma d'onda periodica in una serie di funzioni trigonometriche (analisi di Fourier).

Dalle equazioni di Maxwell si deduce che anche in assenza (o a grande distanza) da sorgenti di campi elettrici e magnetici è possibile avere soluzioni non nulle purchè queste siano sotto forma della propagazione di una perturbazione dei campi elettrici e magnetici variabili nel tempo e tra loro strettamente connessi. Questo dà luogo al concetto di onda elettromagnetica. La linearità delle equazioni di Maxwell assicura inoltre che tali onde soddisfano al principio di sovrapposizione, per cui il campo sarà espresso dalla somma (vettoriale) dei campi elettromagnetici dovuti a ciascuna sorgente come se le loro azioni fossero separate.

Interferenza

In genere piccole perturbazioni ad una situazione di equilibrio di un campo fisico possono essere trattate in regime lineare, vale a dire che la risposta del campo alla perturbazione, in ogni punto, sarà direttamente proporzionale all'ampiezza della perturbazione stessa, purchè quest'ultima si mantenga piccola. In questo caso il campo di perturbazioni è analogo, in ogni punto, ad un oscillatore armonico, per il quale vale una relazione quadratica tra l'ampiezza della perturbazione e l'energia da essa trasportata. Ciò vale anche per le onde elettromagnetiche e quindi una sorgente di onde elettromagnetiche creerà una distribuzione di energia $I \propto E^2$ in ogni punto nel quale è presente il campo elettromagnetico con ampiezza E del campo elettrico. Il principio di sovrapposizione delle onde, attribuibile alla linearità delle equazioni di Maxwell nel caso elettromagnetico, consente di valutare come l'intensità delle onde si distribuisce nello spazio qualora siano presenti due o più sorgenti.

Se consideriamo due sorgenti S_1 ed S_2, come mostrato in Fig.1, e supponiamo che esse emettano onde elettromagnetiche isofrequenziali con ampiezze dei campi elettrici $E_1 = E_1^{(0)} \cos(\omega t + \phi_1)$, $E_2 = E_2^{(0)} \cos(\omega t + \phi_2)$, avremo, nel punto P situato a distanza l_1 da P_1 e l_2 da P_2 $E_1 = E_1^{(0)}(P) \cos(\omega t + 2\pi l_1/\lambda + \phi_1)$, $E_2 = E_2^{(0)}(P) \cos(\omega t + 2\pi l_2/\lambda + \phi_2)$. Supponendo che i campi elettrici vibrino nella stessa direzione potremo scrivere l'intensità totale nel punto P come: $I = \alpha E(P)^2 = \alpha[E_1(P) + E_2(P)]^2 = [E_1^{(0)}(P) \cos(\omega t + 2\pi l_1/\lambda + \phi_1) + E_2^{(0)}(P) \cos(\omega t + 2\pi l_2/\lambda + \phi_2)]^2$ dove α è una costante di proporzionalità. Sviluppando il quadrato e introducendo le intensità $I_1(P)$ $(I_2(P))$ misurate in P con la presenza della sola sorgente S_1 (S_2) si ottiene,

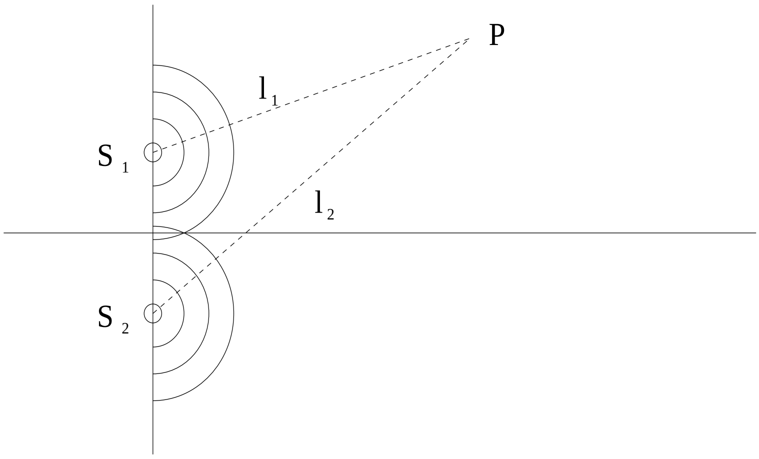

Figura 1:

considerando un tempo di integrazione $\tau \gg \omega^{-1}$ del rivelatore nel punto P,

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\cos[2\pi(l_1 - l_2)/\lambda + \phi_1 - \phi_2] \quad (4)$$

dal che si osserva che l'intensità nel punto P è composta dalla somma delle intensità delle singole sorgenti prese separatamente, che in generale rende l'intensità minore o maggiore: in altri termini il principio di sovrapposizione per le ampiezze dei campi elettromagnetici si traduce in una somma interferenziale per le relative intensità, proporzionali ai quadrati delle ampiezze.

Se si realizza $I_1(P) = I_2(P) = I_0(P)$ avremo

$$I(P) = 2I_0(P)\{1 + \cos[2\pi(l_1 - l_2)/\lambda + \phi_1 - \phi_2]\}. \quad (5)$$

Se ci limitiamo a considerare i punti P' per i quali $l_1 = l_2$ (lungo l'asse del segmento congiungente le due sorgenti) avremo $I(P') = 2I_0[1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)]$, quindi se le due sorgenti vibrano in fase ($\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi$ con k intero) avremo $I(P') = 4I_0$, se invece vibrano in opposizione di fase $\phi_1 - \phi_2 = (2k+1)\pi$ e $I(P') = 0$.

Se invece consideriamo sorgenti con differenza di fase nulla l'intensità in un punto generico P sarà determinata unicamente della differenza di percorso ottico $l_1 - l_2$. In generale saranno presenti sia differenze di percorso sia sfasamenti tra le sorgenti. Ci limiteremo però nel seguito a considerare interferenza da sorgenti situate a grande distanza dal punto P, oppure a distanza finita se osservate con un cannocchiale, in modo che anziché considerare distanze avrà senso introdurre l'angolo sotteso dal punto P ad esempio rispetto all'asse del

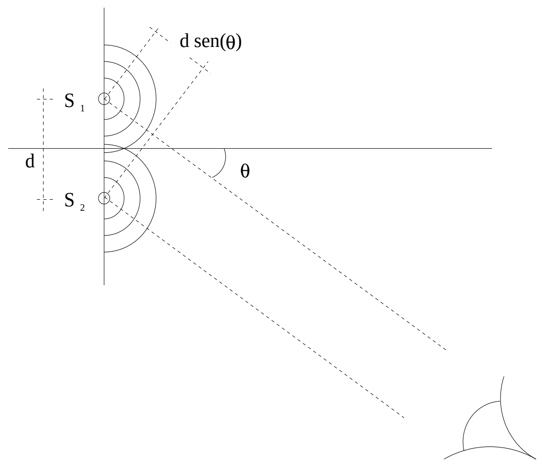

Figura 2: Sfasamento e differenza di cammino ottico.

segmento congiungente le due sorgenti. In questa condizione, detta di Fraunhofer, la differenza di percorso ottico ha una semplice espressione in termini dell'angolo θ:

$$l_1 - l_2 = d \sin\theta. \tag{6}$$

come mostrato in Fig.2

La condizione di interferenza costruttiva si ottiene qui per differenze di percorso multiple intere della lunghezza d'onda λ e si traduce in una condizione per la deviazioni angolari θ_n tali che:

$$\sin\theta_n = \frac{n\lambda}{d} \tag{7}$$

Sarà utile, per le considerazioni che seguono, introdurre la notazione complessa definendo i campi elettrici in termini di ampiezza E_0 e fase ϕ_k, $E_k = E_0 e^{i\phi_k}$. Ciò è particolarmente utile in quanto l'intensità risulta in tal caso proporzionale al modulo quadrato del vettore campo elettrico. Ad esempio, nel caso già trattato avremo:

$$E = E_1^0(P)e^{i(\omega t + 2\pi l_1/\lambda + \phi_1)} + E_2^0(P)e^{i(\omega t + 2\pi l_2/\lambda + \phi_2)} \tag{8}$$

ed è facile vedere che da $I \propto |E|^2$ si ottiene la (4). Il metodo complesso è particolarmente utile nel caso di molte sorgenti. Se supponiamo ad esempio di avere N sorgenti equidistanti a due a due e giacenti sulla stessa retta avremo un campo elettrico:

$$E = \sum_k E_k e^{i\phi_k} \tag{9}$$

ove, se il contributo allo sfasamento è solo dovuto al percorso ottico $\phi_k = k\phi$ e se supponiamo la stessa ampiezza, avremo:

$$E = E^0 \sum_k E_k (e^{i\phi})^k = E^0 \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}. \tag{10}$$

Dalla (10) si ottiene, considerando il modulo quadrato di E:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin N\phi/2}{\sin \phi/2} \right]^2 \tag{11}$$

dove abbiamo indicato con I_0 l'intensità di una singola sorgente.

Da uno studio della $I(\phi)$ si nota che:

a) l'intensità in avanti ($\phi \to 0$) è pari a $N^2 I_0$, cioè è N^2 volte l'intensità di una singola sorgente;

b) esistono massimi assoluti (principali) per $\phi/2 = k\pi$, mentre tra due massimi principali esistono $N-1$ zeri ed $N-2$ massimi secondari, corrispondenti all'annullamento del solo numeratore.

Naturalmente, nel caso di condizioni di Fraunhofer, per sorgenti che vibrano con la stessa fase avremo $\Delta\phi = \pi\ d \sin\theta/\lambda$.

Diffrazione

Si osservano fenomeni di diffrazione ogni qualvolta la luce incontra degli ostacoli o si propaga attraverso fenditure con dimensione comparabile alla lunghezza d'onda della luce. Mentre l'ottica geometrica prevede zone distinte di ombra e di luce al di là di un ostacolo, la teoria ondulatoria prevede deviazioni da questa situazione tanto più rilevanti tanto più elevato è il rapporto λ/d, con d dimensione caratteristica dell'ostacolo. I fenomeni di diffrazione sono riconducibili all'interferenza qualora si introduca il principio di Huygens. Quest'ultimo afferma che ogni punto di un'onda può essere immaginato come sorgente elementare di onde sferiche, il cui inviluppo consente di costruire i successivi fronti d'onda. Si può quindi considerare la diffrazione come l'interferenza di un numero elevato, al limite infinito, di sorgenti infinitesime di onde sferiche soddisfacenti al principio di Huygens. Sia dx la distanza tra due sorgenti infinitesime, e x la distanza di una di esse da un estremo della fenditura piana di apertura a. Allora il campo elettrico, in condizioni di Fraunhofer, è scritto come:

$$E = \alpha \int_0^a dx e^{i2\pi x \sin\theta/\lambda} = -\frac{i\alpha\lambda}{2\pi \sin\theta} (e^{i2\pi d \sin\theta/\lambda} - 1) \tag{12}$$

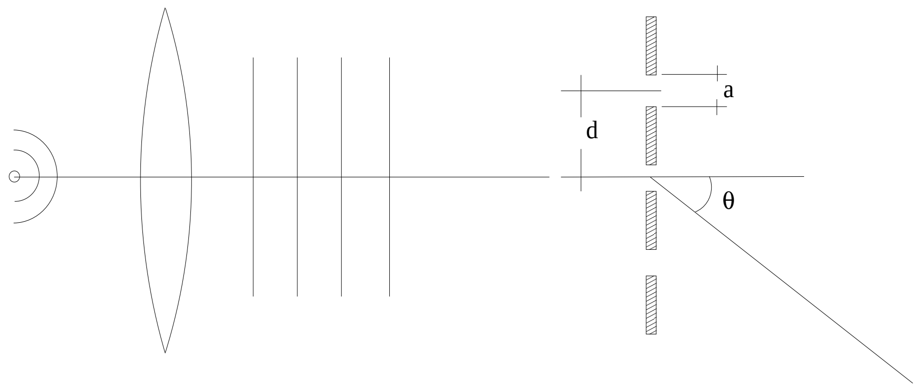

Figura 3:

da cui

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a \sin\theta/\lambda)}{\pi a \sin\theta/\lambda} \right]^2 \tag{13}$$

ove I_0 è l'intensità in avanti dell'onda diffratta.

Reticolo di diffrazione

Analizziamo ora il caso più generale di N fenditure di larghezza a e passo (distanza tra due fenditure) d, mostrato in Fig.3.

In tal caso l'intensità $I(\theta)$ in condizioni di Fraunhofer è ancora data dalla (11) ma con ampiezza modulata dal fattore di forma di diffrazione in (13). Qualitativamente il massimo in avanti (a $\theta = 0$) diventa il massimo assoluto mentre gli altri massimi principali hanno intensità inversamente proporzionale alla distanza dal massimo in avanti, o al numero m (detto numero d'ordine del massimo principale). Inoltre, se passo e larghezza delle fenditure sono tra loro commensurabili, alcuni massimi principali sono soppressi dal fattore di forma di diffrazione. Il reticolo di diffrazione trova utilizzo per l'analisi spettrale delle onde elettromagnetiche, utilizzando la dipendenza dell'intensità della luce dalla lunghezza d'onda. Ad esempio per i massimi principali si hanno angoli di deflessione tali che:

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{d} \tag{14}$$

e quindi i massimi saranno situati ad angoli diversi per le diverse lunghezze d'onda. Conviene definire il *potere dispersivo* di un reticolo di diffrazione all'ordine m come:

$$D_m = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{1}{d}\frac{m}{\cos\theta_m} \tag{15}$$

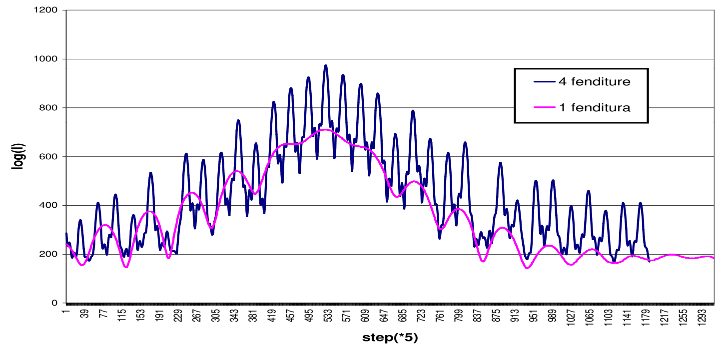

Figura 4: figure di interferenza e diffrazione da singola fenditura e da quattro fenditure. Si consideri che in ordinata è rappresentato il $ln(I)$ dell'intensità trasmessa dalle fenditure.

dove l'ultima relazione è stata ottenuta dalla (14). Il potere dispersivo risulta quindi direttamente proporzionale all'ordine del reticolo e inversamente proporzionale al passo del reticolo. Un elevato potere dispersivo non implica automaticamente un'elevata capacità di risolvere diverse lunghezze d'onda, dato che quest'ultima è anche determinata dalla larghezza dei massimi principali. Adottando il criterio di Rayleigh per la risoluzione tra due massimi principali due lunghezze d'onda λ e $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ saranno distinguibili se potranno generare massimi principali distinguibili, cioè soddisfacenti al criterio di Rayleigh. Essendo il primo minimo dell'intensità adiacente ad un massimo principale separato di una quantità corrispondente a $\sin\theta_{min} = \lambda/Nd$ ed essendo la separazione tra due massimi principali corrispondente ad una variazione $\Delta\lambda$ $\Delta\theta_m = D_m\Delta\lambda \simeq m/d\Delta\lambda$ e quindi si ha $m/\Delta\lambda/d \geq \lambda/Nd$ da cui $\Delta\lambda \geq \lambda/mN$. Conviene definire il *potere risolutivo*

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \tag{16}$$

Il potere risolutivo è quindi indipendente dal passo del reticolo e risulta proporzionale al numero di fenditure e al numero d'ordine. Il primo risulta limitato da problemi tecnologici, mentre al crescere del numero d'ordine diminuisce l'intensità della luce raccolta a causa del fattore di forma dovuto alla diffrazione, legato all'apertura di ciascuna fenditura.

Studio dell'interferenza e della diffrazione da sistemi a poche fenditure

È possibile studiare i fenomeni di diffrazione ed interferenza con luce visibile utilizzando sistemi di fenditure. Questi possono essere ottenuti mediante tecniche di foto-impressione usualmente utilizzate per la produzione di circuiti elettrici stampati. Si possono usare per il substrato fogli di acetato sui quali si può ottenere una risoluzione di riproduzione nell'ordine di qualche μm. Uno schema dell'apparato sperimentale a disposizione è riportato in Fig.5.

Il foglio di acetato, sul quale vengono impresse 1, 2, 3 e 4 fenditure, è montato su un telaietto per diapositive. Quest'ultimo è poi traslabile sul riferimento generale del dispositivo mediante una vite micrometrica, al fine di consentire l'illuminazione del numero di fenditure desiderato.

La sorgente di luce è costituita da un laser a stato solido emettente una potenza di $\simeq 0.3$mW ad una lunghezza d'onda $\lambda = 670$nm. Le caratteristiche della luce laser, in particolare la bassa dispersione angolare, permettono di disporre di un fascio di luce parallela senza impiegare complicati sistemi di collimazione del fascio luminoso. Inoltre è possibile disporre, come conseguenza della bassa dispersione, di elevate intensità, consentendo l'utilizzo di rivelatori di intensità luminosa con bassa accettanza angolare. Un inconveniente del laser a stato solido è costituito dalla scarsa stabilità in frequenza dovuta a fenomeni interni di dissipazione, e la deriva termica può essere quantificata in ± 5nm. Lunghezza d'onda e intensità della luce, larghezza e passo delle fenditure fissano le caratteristiche del sistema di rivelazione.

Considerando la singola fenditura, si nota che la separazione angolare tra il massimo principale e il minimo adiacente è, per $\lambda = 670$ nm e $a = 100\mu$m, $\Delta\Theta \simeq \lambda/a = 6.7$ mrad, il che implica, per ragionevoli valori dell'apertura del rivelatore (dell'ordine del mm o una sua frazione) un braccio dell'ordine del metro. Nel caso specifico si dispone di un braccio di 700 mm imperniato ad un'estremità sull'asse della fenditura. All'altra estremità è montato il rivelatore costituito da un fototransistor. Quest'ultimo fornisce un segnale elettrico che poi viene amplificato. Per garantire la dinamica necessaria alla rivelazione dei massimi secondari, nel caso di 3 o 4 fenditure, e dei minimi si utilizza un amplificatore logaritmico. Il diaframma del fototransistor ha un

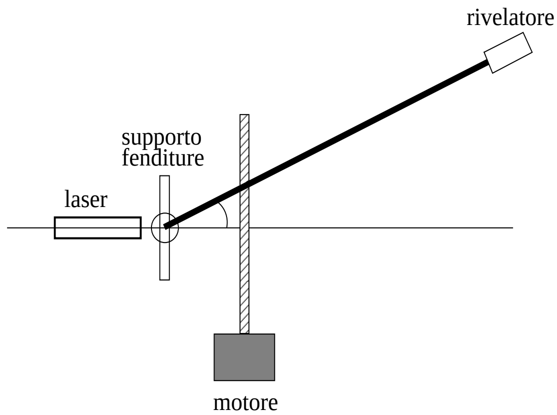

Figura 5: Schema di apparato sperimentale per lo studio di fenomeni di diffrazione e interferenza prodotti da sistemi di fenditure.

diametro di 0.6 mm. L'angolo solido intercettato dal fototransistor è perciò pari a $\Omega = \pi 0.3^2/700^2 = 5.7 \cdot 10^{-7}$ steradianti. La divergenza massima del fascio di luce rivelato è invece pari a $\delta\Theta = 8.57 \cdot 10^{-4}$ radianti $\simeq \Delta\Theta/8$. Diametri minori del diaframma consentirebbero di ottenere minori divergenze e, in linea di principio, una migliore risoluzione angolare. Tuttavia questo è ottenuto al prezzo di diminuire l'angolo solido intercettato e quindi la quantità di luce intercettata dal fototransistor, che al limite potrebbe risultare comparabile col rumore di fondo intrinseco (misurabile ostruendo completamente la ricezione della luce da parte del diaframma). D'altra parte se invece il diametro del diaframma fosse maggiore si avrebbe un segnale più intenso ma si perderebbe in risoluzione angolare, compromettendo la possibilità di osservare strutture dettagliate nelle figure di interferenza e diffrazione.

Il movimento del braccio viene effettuato mediante una vite senza fine e chiocciola fissata alla distanza $d = (65.5 \pm 0.5)$ mm dal perno. L'errore rappresenta l'incertezza su d dovuta al montaggio meccanico dei vari componenti. La vite ha passo $p = 0.5$ mm ed è azionata da un motore passo-passo con 400passi/giro, quindi l'avanzamento della chiocciola per unità di passo è di $0.5 mm/giro/400$ passi/giro $= 1.25$ μm corrispondente ad una rotazione del braccio di $\delta\phi = 1.25 \cdot 10^{-6}$ m/passo / $65.5 \cdot 10^{-3}$ m $= 1.9 \cdot 10^{-5}$ rad/passo, ovvero sono necessari circa 45 passi per avere un'escursione angolare pari alla divergenza angolare del rivelatore. Lo strumento disponibile è dotato di una centralina che consente sia l'acquisizione dei dati dall'amplificatore logaritmico, sia lo spostamento del braccio di un numero programmabile di passi. È inoltre disponibile una procedura automatizzata di centraggio intorno al massimo assoluto dell'intensità luminosa.

Particolare cura va posta nel determinare il numero di passi tra due misure consecutive che deve risultare un compromesso tra la risoluzione richiesta e il tempo complessivo di misura. L'ampiezza angolare massima investigabile è inoltre limitata dal rumore di fondo del fototransistor dato che a causa del fattore di forma di diffrazione il segnale diminuisce progressivamente all'aumentare dell'apertura angolare.

Si suggerisce pertanto di determinare il rumore di fondo del fototransistor e di fermare la misura ad un'ampiezza per la quale i massimi principali hanno un basso contrasto rispetto ai minimi o presentano un'intensità comparabile al rumore di fondo (ovvero in condizioni tali che il rapporto segnale-rumore è ancora dell'ordine di qualche unità). In Fig.4 compare l'andamento dell'intensità della luce registrata dal fototransistor in funzione del numero di passi per il caso di una fenditura singola (a) e di 4 fenditure (b). Si noti che in quest'ultimo caso l'intensità in avanti ($\theta = 0$) è maggiore rispetto al caso di una singola fenditura. Tenendo presente infatti il comportamento logaritmico dell'amplificatore, si ottiene un'intensità che è 4^2 volte quella trasmessa dalla fenditura singola, a parità di intensità incidente per ciascuna fenditura.

L'esperienza con il reticolo di diffrazione

In questa esperienza si studiano fenomeni di interferenza e diffrazione da sistemi a molte fenditure, comunemente denominati reticoli di diffrazione. L'apparato sperimentale è schematizzato in Fig.6.

Lo scopo dell'esperienza consiste nella misura delle lunghezze d'onda della luce emessa da una sorgente di Cadmio (uno spettro a righe, con le righe più intense nel blu, azzurro, verde e rosso) noto il passo del reticolo. Quest'ultimo viene assunto essere pari a:

$$d = (12.650 \pm 0.05)\mu m$$

corrispondente a $\approx$ 800 fenditure/cm e, dalla relazione (14) si ottiene la lunghezza d'onda noti gli angoli di deviazione ed il numero d'ordine.

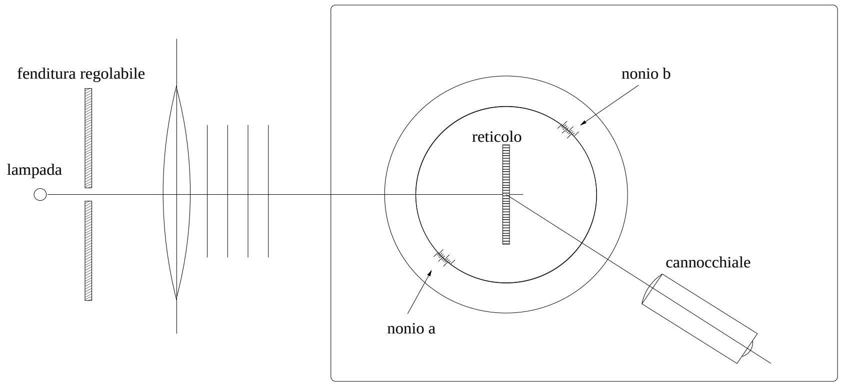

Figura 6: schema dell'apparato sperimentale per l'uso di un reticolo di diffrazione

Il calcolo dell'errore su λ fornisce:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + (cotg(\theta_n)\delta\theta_n)^2} \tag{17}$$

con un errore decrescente al crescere dell'ordine di diffrazione. Tuttavia per numeri d'ordine crescenti l'intensità della luce diminuisce a causa del fattore di forma della diffrazione. Per non ricorrere ad una media pesata si può però osservare che si può riscrivere la relazione fondamentale come

$$\sin\theta_n = n\frac{\lambda}{d} \tag{18}$$

per la quale si ha una relazione lineare tra il seno dell'angolo e l'ordine di diffrazione, con pendenza pari alla lunghezza d'onda in unità del passo del reticolo. Questa procedura ha il vantaggio di pesare di più i punti più lontani dall'origine e di fornire contemporaneamente una stima corretta dell'errore casuale. Inoltre l'ipotesi di errore nullo sull'ascissa, alla base della regressione lineare, in questo caso è rigorosamente verificata. Come in altre occasioni, essendo interessati alla pendenza, in linea di principio la regressione a due parametri è più corretta perchè è esente dall'influenza di un eventuale errore sistematico di zero. Tuttavia la procedura sperimentale dovrebbe annullare l'errore di zero e quindi è utile confrontare anche i dati della regressione per l'origine.

Tra le sorgenti di errore sistematico menzioniamo:

a) quello commesso sul passo del reticolo;

b) l'errore di eccentricità. Il nonio è uno strumento che misura lunghezze; la conversione in angolo deriva dalla presunta conoscenza del raggio. Se il nonio non è posto alla giusta distanza dall'asse di

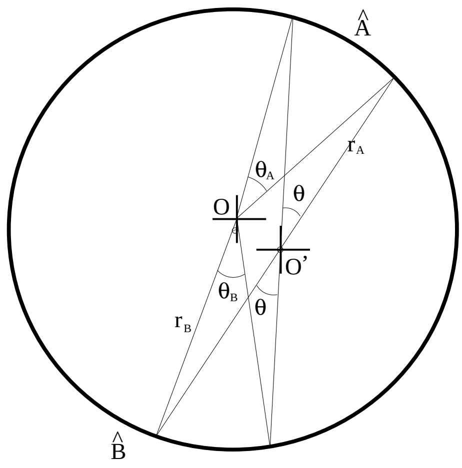

Figura 7:

rotazione o se l'asse è eccentrico, la misura è influenzata da un errore sistematico dipendente dall'angolo tra la direzione di misura e quella definita dall'ipotetico centro di rotazione e dal centro di rotazione reale. Con due nonii diametralmente opposti l'errore viene totalmente eliminato se si prende l'angolo pari alla media degli angoli misurati dai due nonii. Infatti, con riferimento alla figura 7, dove questo effetto è stato accentuato per maggiore chiarezza, si ha:

$$\theta_A = \frac{\hat{A}}{r} \quad ; \quad \theta_B = \frac{\hat{B}}{r}$$

$$\theta = \frac{\hat{A}}{r_A} = \frac{\hat{B}}{r_B}$$

$$\frac{\theta_A + \theta_B}{2} = \frac{\theta}{r}\frac{r_A + r_B}{2} = \theta$$

Questo motiva la presenza dei due noni e la necessità di mediare tra le due misure. Naturalmente l'errore di eccentricità è tanto più evidente quanto maggiore è l'angolo di rotazione. Di conseguenza questo fatto deve essere tenuto presente in particolare quando si ruota il cannocchiale di 90^o ed il reticolo di 45^0 per la procedura di ortogonalizzazione del reticolo: la rotazione deve essere tale che l'angolo medio sia pari a quello voluto (90^o o 45^o);

c) errore di ortogonalità del reticolo. Le formule di interferenza di N sorgenti (reticolo) e di diffrazione da una fenditura valgono nel caso di osservazione e incidenza in luce parallela (diffrazione di Fraunhofer) e per raggi incidenti perpendicolari al reticolo o alla fenditura. Se

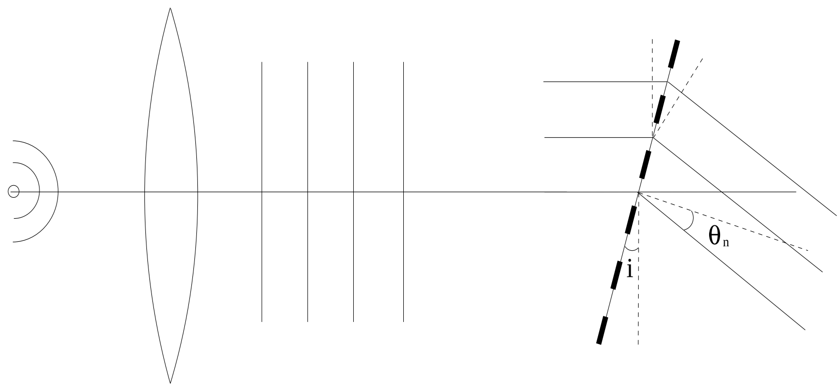

Figura 8:

l'incidenza non è perpendicolare, gli angoli di diffrazione, rispetto alla normale, a destra e a sinistra non sono simmetrici (vedi figura 8). Qui gli angoli sono considerati positivi a destra (ordini di diffrazione positivi) e negativi a sinistra. Se la luce incidente forma l'angolo i con la normale, la condizione di interferenza costruttiva (diffrazione distruttiva) si ottiene

$$d \sin i + d \sin \theta_n = n\lambda$$
$$\sin \theta_n = n\frac{\lambda}{d} - \sin i$$

che rompe la simmetria destra-sinistra. Difatti:

$$sin\theta^+ = n^+\frac{\lambda}{d} - \sin i$$

$$sin\theta^- = n^-\frac{\lambda}{d} - \sin i = -n^+\frac{\lambda}{d} - \sin i$$

Applicando le formule di prostaferesi e definendo

$$\frac{\theta^+ + \theta^-}{2} = \frac{\theta^+ - |\theta^-|}{2} = \Delta\theta$$
$$\frac{\theta^+ - \theta^-}{2} = \frac{\theta^+ + |\theta^-|}{2} = \bar{\theta}$$

per angoli di incidenza i piccoli l'angolo medio è relativamente piccolo per cui:

$$-2 \sin i = 2 \sin\Big(\frac{\theta^+ + \theta^-}{2}\Big) \cos\Big(\frac{\theta^+ - \theta^-}{2}\Big) = 2 \sin \Delta\theta \cos \bar{\theta} \simeq 2 \sin \Delta\theta$$
$$\Delta\theta \simeq -i$$

L'asimmetria rispetto alla normale è quindi circa pari a $-i$. Però è ovvio che essa sia molto minore rispetto alla direzione dei raggi non deviati. Questo è un punto rilevante perchè sperimentalmente si può facilmente misurare la direzione dei raggi non deviati (massimo centrale) e non la direzione della normale. Il massimo centrale (n=0) si ha infatti per

$$d \sin i + d \sin \theta_0 = 0 \quad , \quad \theta_0 = -i$$

Misurando gli angoli dei vari ordini di diffrazione rispetto a questa direzione, si ha

$$\theta_m^{\pm} = \theta^{\pm} - \theta_0 = \theta^{\pm} + i$$

Sostituendo nella relativa espressione per i seni e sommando si ha:

$$2 \sin i + \sin(\theta_m^+ - i) + \sin(\theta_m^- - i) = 0$$

e nell'approssimazione $\sin x \simeq x$ si ha anche $\theta_m^+ \simeq -\theta_m^-$. Questo dimostra che l'asimmetria è fortemente ridotta, ma non eliminata se non nell'approssimazione di piccoli angoli.

Viceversa, utilizzando le formule precedenti, si ottiene:

$$\sin(\theta_m^+ - i) - \sin(\theta_m^- - i) = 2n^+ \frac{\lambda}{d} = 2 \cos(\Delta\theta_m - i) \sin \bar{\theta}_m$$

$$n \frac{\lambda}{d} = \sin \bar{\theta}_m [\cos \Delta\theta_m \cos i + \sin \Delta\theta_m \sin i] = C \sin \bar{\theta}_m$$

Si vede quindi che:

a) è importante una procedura di ortogonalizzazione del reticolo per rendere l'angolo i il più piccolo possibile, e tutte le approssimazioni precedenti più accurate;

b) considerare l'angolo medio destro o sinistro fornisce la grandezza desiderata $n\frac{\lambda}{d}$ a meno del fattore correttivo C.

Per chiarire l'importanza di questo punto facciamo un esempio numerico. Consideriamo $\lambda = 0.5\mu$m, $d = 10\mu$m, $n = 4$, $n\lambda/d = 0.2$. Sia inoltre $i = 5.74^0$ in modo tale che $\sin i = 0.1$. In queste condizioni si ha

$$\sin \theta^+ = 0.1; \theta^+ = 5.74^0 \quad , \quad \sin \theta^- = -0.3; \theta^- = -17.46^0$$

$$\bar{\theta} = 11.60^0; \Delta\theta = -5.86^0$$

Si vede che l'asimmetria rispetto al massimo centrale è di soli 12 centesimi di grado. Infatti si ha anche

$$\theta_m^+ = 11.48^0 \;\; ; \;\; \theta_m^- = -11.72^0 \;\; ; \;\; \bar{\theta}_m = 11.60^0 \;\; ; \;\; \Delta\theta_m = -0.12^0$$

Tutto ciò potrebbe sembrare soddisfacente se non fosse che il calcolo del coefficiente correttivo C fornisce

$$\sin\bar{\theta}_m = 1.0048 n \frac{\lambda}{d} \tag{19}$$

e quindi un errore relativo nella determinazione della quantità di interesse di quasi il 5 per mille, inaccettabile per una misura ad alta precisione come quella che si vuole eseguire. Fortunatamente l'errore di ortogonalità scelto come esempio è enorme, ad occhio si può posizionare il reticolo ortogonale entro 1 o 2 gradi. Nonostante ciò, ad esempio per un angolo $i = 1.15^0$ ($\sin i = 0.02$), si ottiene un'asimmetria di soli 2 centesimi di grado, ma un coefficiente C che differisce dall'unità di $1.9 \cdot 10^{-4}$, cioè si commette ancora un errore relativo della stessa entità. È ovvio che l'incertezza nell'ortogonalità del reticolo o della fenditura deve essere attentamente valutata nell'assegnare il valore finale dell'errore sulla lunghezza d'onda.

Il fenomeno della dispersione

La propagazione di onde elettromagnetiche in un mezzo materiale può essere descritta dalle equazioni di Maxwell considerando i fenomeni di polarizzabilità e magnetizzazione del mezzo. Un campo elettrico oscillante in un mezzo produce un momento di dipolo per unità di volume dovuto allo spostamento degli elettroni rispetto ai centri di carica atomici. Tale effetto di polarizzazione modifica le caratteristiche della radiazione, in particolare la velocità di fase. Se inoltre immaginiamo gli elettroni legati in sistemi armonici smorzati caratterizzati da opportune pulsazioni caratteristiche ed effetti viscosi, la reazione alla sollecitazione del campo elettrico oscillante risulterà dipendente dalla pulsazione della radiazione incidente. Il risultato è che la velocità di fase $v(\omega)$ viene modificata anche in funzione della pulsazione della radiazione.

L'indice di rifrazione $n(\omega) = c/v(\omega)$ risulta dipendente dalla pulsazione ω della radiazione, secondo la *"formula di Cauchy"* $n(\omega) = A + B\omega^2/(2\pi c) = A + B/\lambda^2$ dove λ rappresenta la lunghezza d'onda caratteristica della radiazione nel vuoto.

Un esempio della dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda della radiazione è riportato in Fig.9 ed in Tab.1 per le tre lunghezze d'onda caratteristiche corrispondenti alla riga F di emissione dell'idrogeno (Blu, $\lambda_F = 486.1$ nm), alla riga D del sodio (Giallo, $\lambda_D = 589.3$ nm) e alla riga C dell'idrogeno (Rosso, $\lambda_C = 656.3$ nm). Questi valori di lunghezze d'onda caratteristiche erano già stati presentati nella discussione dei fenomeni di aberrazione cromatica e del coefficiente di dispersione per le lenti.

Tabella 1: *Valori dell'indice di rifrazione*

	$n(\lambda_F)$	$n(\lambda_D)$	$n(\lambda_C)$
vetro flint	1.632	1.620	1.613
quarzo	1.550	1.544	1.541
vetro crown	1.510	1.506	1.504

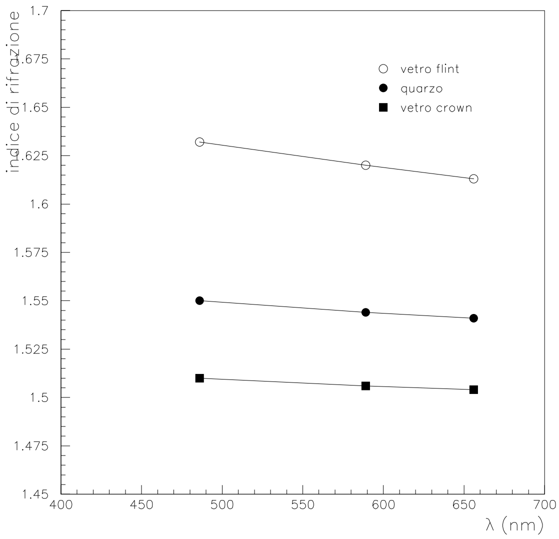

Figura 9:

Il prisma

Uno dei dispositivi più semplici per osservare il fenomeno della dispersione della luce è il prisma. Una lastra di materiale trasparente è lavorata in modo che due facce piane formino tra loro un angolo α. La figura 10 illustra il comportamento di un raggio luminoso trasmesso da un prisma e soggetto alla legge di Snell della rifrazione:

$$\sin(\theta_i) = n \ \sin(\theta_1) \text{ e } \sin(\theta_e) = n \ \sin(\theta_2)$$

dove θ_i e θ_e indicano gli angoli di incidenza del raggio entrante ed uscente rispetto alle direzioni verticali alle facce del prisma. Detto δ l'angolo di deviazione tra il raggio entrante ed uscente, cerchiamo una relazione tra δ , l'indice di rifrazione n e gli altri angoli in gioco. Valgono le relazioni seguenti:

$$\theta_i + \theta_e = \alpha + \delta \ \text{ e } \ \alpha = \theta_1 + \theta_2$$

$$\sin(\tfrac{\alpha+\delta}{2}) = n \ \sin(\tfrac{\alpha}{2}) \cos((\theta_1 - \theta_2)/2)/\cos((\theta_i - \theta_e)/2)$$

L'espressione trovata risulta piuttosto complessa e la misura indiretta dell'indice di rifrazione n dalle quantità angolari non è agevole. Tuttavia si possono individuare condizioni particolari in cui l'espressione risulta semplificata. Si consideri ad esempio la condizione di emergenza normale, cioè di perpendicolarità tra il raggio emergente e la faccia corrispondente del prisma. In tal caso $\theta_e = \theta_2 = 0$ e quindi

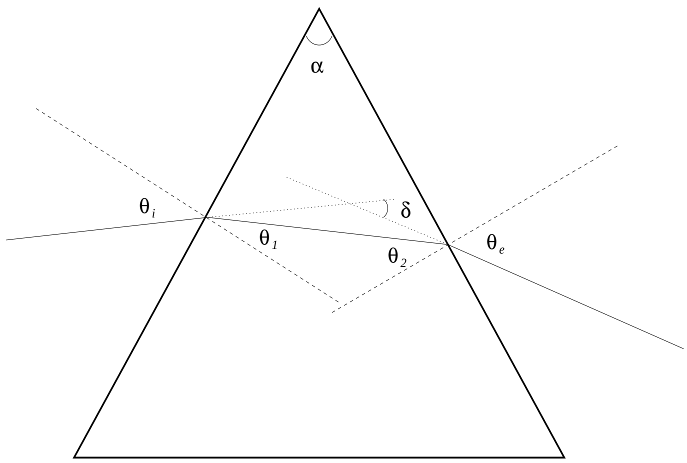

Figura 10:

$$n\ \sin(\alpha) = \sin(\delta + \alpha)$$

La misura di n richiede in tal caso la misura dell'angolo di apertura α del prisma e dell'angolo di deviazione δ, oltre ad un metodo che assicuri l'emergenza normale dei raggi e che verrà esposto in seguito.

Un'altra condizione particolare è quella di minima deviazione dei raggi luminosi. In questo caso $\theta_i = \theta_e$ e $\theta_1 = \theta_2$ e quindi

$$n\ \sin(\tfrac{\alpha}{2}) = \sin(\tfrac{\alpha+\delta_{min}}{2})$$

In questa configurazione, la misura di n richiede dunque α e δ_{min} oltre alla procedura per assicurare la minima deviazione dei raggi luminosi.

La *dispersione* del prisma è misurata dalla differenza angolare $\delta(\lambda_F) - \delta(\lambda_C)$ in condizioni di deviazione minima ed il *potere dispersivo* è dato dal rapporto:

$$D = \tfrac{\delta(\lambda_F) - \delta(\lambda_C)}{\delta(\lambda_D)}$$

Nel caso di piccoli angoli di deviazione, si ottiene la relazione $\delta_{min} = 2\ (n-1)\ tg(\alpha/2)$ e quindi il potere dispersivo può essere riscritto come:

$$D = \tfrac{n_F - n_C}{n_D - 1}$$

Il prisma può dunque essere utilizzato come uno spettrometro per la misura della composizione della luce emessa da una sorgente in termini di lunghezza d'onda. Uno strumento di questo tipo è caratterizzato dalla *dispersione angolare* e cioè dalla variazione della deviazione minima $d\delta_{min}/d\lambda$ con la lunghezza d'onda. Questa quantità risulta:

$$d\delta_{min}/d\lambda = 2\ \sin(\tfrac{\alpha}{2})\tfrac{dn}{d\lambda}/\cos(\tfrac{\delta+\alpha}{2}) = \tfrac{L}{d}\tfrac{dn}{d\lambda}$$

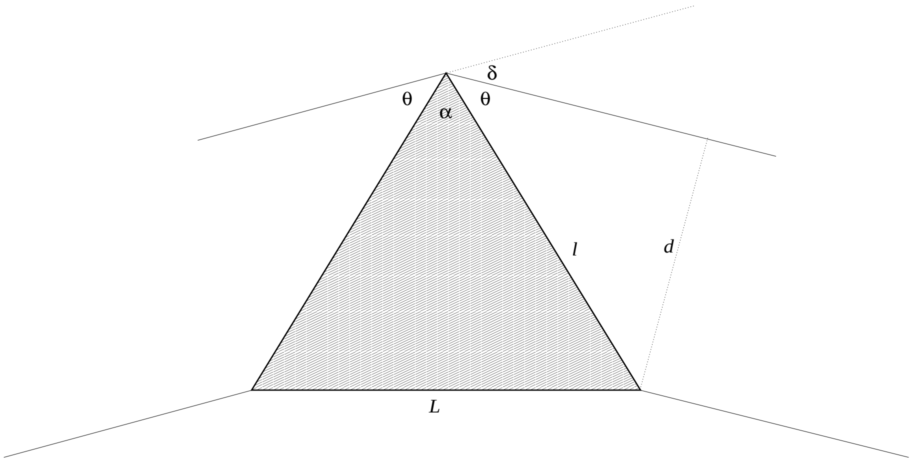

Figura 11:

dove L indica la base del prisma e d la larghezza del fascio di luce (in generale determinata dalle dimensioni del prisma e dall'angolo di incidenza, come mostrato in Fig.11 Il *potere risolutivo* $R = \lambda/\Delta\lambda$ rappresenta il rapporto tra un valore di lunghezza d'onda ed la minima differenza di lunghezze d'onda apprezzabile rispetto a λ. Se la minima separazione angolare è dell'ordine di λ/d allora la formula precedente porta a

$$R = L|\frac{dn}{d\lambda}|$$

Procedure di allineamento di un prisma

L'apparato per l'osservazione di fenomeni dispersivi con un prisma è lo stesso di quello usato per la misura delle lunghezze d'onda della luce con un reticolo di diffrazione. Esso è costituito da una base che sostiene la sorgente luminosa ed un collimatore formato da una fenditura ad apertura variabile e da una lente acromatica ad un'estremità, tali da costruire un fascio di luce parallela. Un cannocchiale posto su di una piattaforma girevole rispetto alla base fissa è dotato di un oculare con un reticolo e fornisce un'immagine della fenditura con un ingrandimento dell'ordine dell'unità. La distanza focale del cannocchiale è di circa 20 cm. Il prisma è posto su di una piattaforma girevole attorno allo stesso asse della piattaforma di sostegno del cannocchiale.

La misura dell'angolo α di *apertura del prisma* sfrutta la riflessione della luce sulle sue facce. Posto il cannocchiale a formare un angolo acuto rispetto alla direzione del fascio di luce prodotto dalla sorgente e collimato, si ruota la piattaforma di sostegno del prisma sino ad osservare l'immagine riflessa della fenditura del collimatore. Misurata questa configurazione angolare della piattaforma girevole, la si ruota fino ad osservare nuovamente l'immagine della fenditura, questa volta prodotta dalla riflessione su un'altra faccia del prisma. La deviazione angolare $\Delta\theta$ tra le due configurazioni della piattaforma di sostegno è una misura dell'angolo di apertura tra le due facce utilizzate per osservare la riflessione dell'immagine della fenditura.

$$\Delta\theta = \pi - \alpha$$

La misura dell'angolo di *deviazione minima* avviene cercando inizialmente attraverso l'oculare del cannocchiale il raggio rifratto dal prisma. A questo punto si insegue il raggio sempre verso la direzione del fascio di luce incidente con il cannocchiale ruotando nello stesso verso la piattaforma di sostegno del prisma. La configurazione in cui l'immagine inverte il senso del suo spostamento, corrisponde alla configurazione di minima deviazione. L'angolo δ_{min} di deviazione minima corrisponde all'apertura angolare della posizione del cannocchiale in questa configurazione rispetto alla direzione osservabile del fascio indeflesso.

La condizione di *emergenza normale* dei raggi luminosi rispetto alla faccia del prisma si può determinare osservando attraverso il cannocchiale oltre all'immagine rifratta della fenditura anche l'immagine del reticolo posto sull'oculare, riflessa dalla faccia di uscita del prisma.

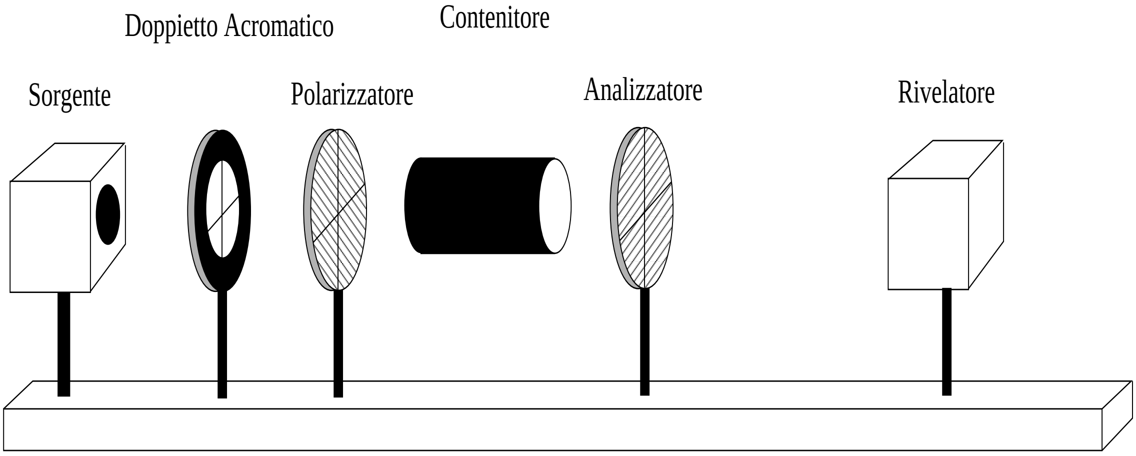

Figura 12:

Potere rotatorio ottico di una soluzione attiva

In questa esperienza si utilizza il banco ottico già utilizzato per le esperienze di ottica geometrica, per misurare il potere rotatorio ottico di una soluzione. Uno schema dell'apparato sperimentale è riportato in Fig.12.

A valle della lampada si pone un doppietto acromatico per generale un fascio parallelo di luce, seguito da un polaroid che trasmette luce polarizzata linearmente. Il fascio di luce viene poi fatto passare attraverso tubi di diversa lunghezza contenenti soluzioni zuccherine a diverse concentrazioni oppure acqua distillata, sostenuti da due cavalieri. A ridosso del tubo si trova l'analizzatore, un altro polaroid situato su un supporto che può ruotare di 360^0. Infine è presente il fotorivelatore già utilizzato per le esperienze sulla diffrazione e l'interferenza, ma anzichè utilizzare poi un amplificatore logaritmico si utilizza un amplificatore lineare. Lo scopo dell'esperienza è di studiare la dipendenza del potere rotatorio ottico dai vari parametri in gioco, e cioè percorso, concentrazione della soluzione, e lunghezza d'onda della luce. La legge di Malus esprime la dipendenza dell'intensità della luce trasmessa in funzione dell'angolo tra gli assi di due polaroid:

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta \tag{20}$$

Attraversando una sostanza otticamente attiva la curva di Malus viene modificata sia attraverso l'inevitabile attenuazione dell'intnsità luminosa, sia attraverso uno sfasamento $\Delta\Phi$ da aggiungere all'argomento della (20). Se analizziamo la risposta del fotorivelatore senza e con

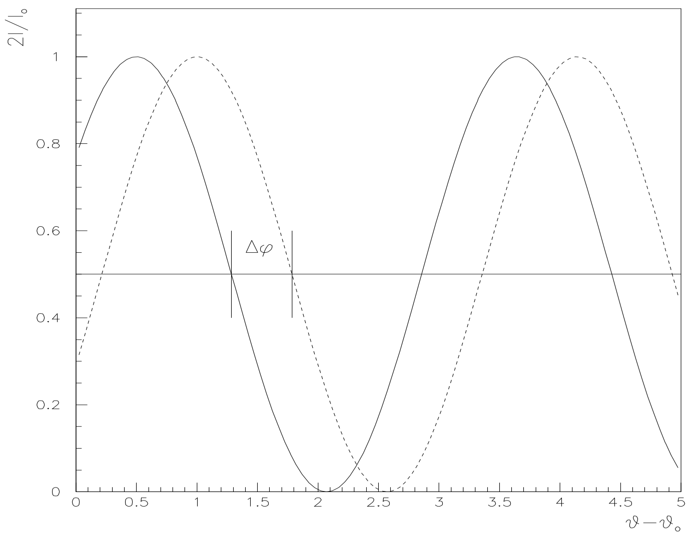

Figura 13:

i tubi si registrerà pertanto una traslazione delle curve proporzionali alla rotazione del piano ottico. Si può verificare che lo sfasamento indotto dalla soluzione è direttamente proporzionale alla distanza l percorsa in soluzione e alla sua concentrazione c. Si può pertanto ottenere la costante di proporzionalità, detta potere rotatorio ottico specifico, attraverso lo studio della legge:

$$\Delta\Phi = \alpha c l \tag{21}$$

con α potere rotatorio specifico, dipendente dalla sostanza e, a parità di essa, dalla lunghezza d'onda della luce. La presenza di tre filtri consente di studiare la dipendenza di α dalla lunghezza d'onda della luce incidente.