FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica, Meccatronica
Canale ....
Compitino del 9 maggio 2009

Esercizio 1

Una pietra , lanciata con un angolo di alzo θ=60°, colpisce un bersaglio che ha coordinata x=81 m e si trova ad un'altezza y=35.32 m rispetto al punto di lancio. Si trascurino tutti gli attriti.
Si determinino:
- la velocità iniziale
- la velocità della pietra quando colpisce il bersaglio,
- la coordinata y del punto di massimo della traiettoria.

v_0(m/s)	35	11	42	97
v_F(m/s)	9.34	23.1	16.4	45.3
y_{max} (m)	46.9	16.7	91.2	63.4

I

La pietra, sotto l'azione dell'accelerazione di gravità, svolge un moto parabolico, L'equazione della traiettorie e le leggi orarie del moto sono:

$$y = xtg\theta - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta} \qquad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_o sen\theta - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = v_o sen\theta \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Sostituendo i valori delle coordinate nell'equazione della traiettoria si ottiene:

$$v_o^2 = \frac{g}{2}\frac{x^2}{\cos^2\theta}\frac{1}{(x\tan\theta - y)} = 1235.35(m/s)^2 \qquad v_0 = 35m/s$$

Inserendo nelle leggi orarie la coordinata x o y del bersaglio si trova il tempo necessario a raggiungerlo, calcolato il tempo, si deriva la velocità in y e da quì il modulo della velocità della pietra quando colpisce il bersaglio:

$$81 = v_0 \cos\theta \cdot t \Rightarrow \qquad t = \frac{81}{v_0 \cos\theta} = 4.629s \qquad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta = 17.5m/s \\ v_y = v_0 sen\theta - gt = -15.05m/s \end{cases}$$

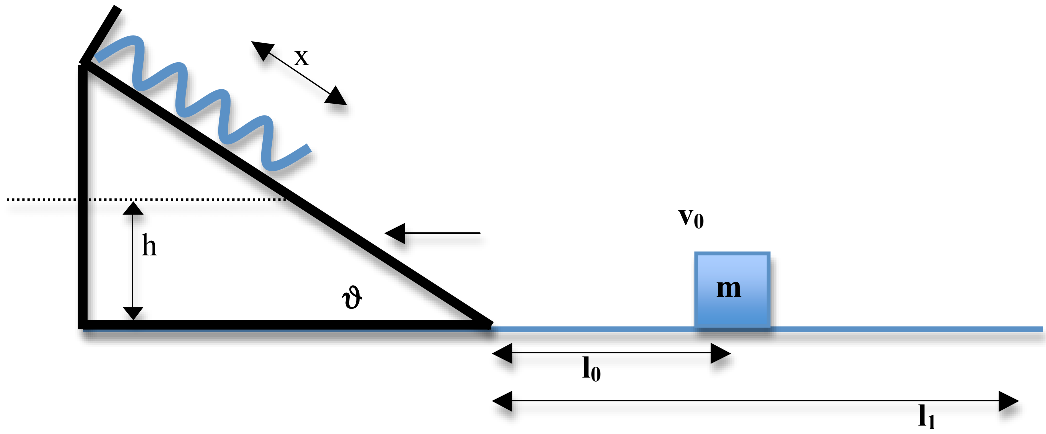
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 23.08m/s$$

$$y_v = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g} = 46.88m$$

Esercizio 2

Un corpo di massa $m = 1.2kg$ si sta muovendo su un piano orizzontale scabro con coefficiente d'attrito dinamico $\mu_D = 0.15$, con una velocità iniziale $v_0 = 3.3m/s$. Dopo aver percorso una distanza $l_0 = 1.4m$ comincia a salire su un piano inclinato con angolo alla base $\vartheta = 30°$, senza attrito. Dopo essere salito di una quota $h = 25cm$ incontra una molla con costante elastica $k = 80\,N/m$, inizialmente a riposo che lo frena ulteriormente fino a fermarlo. Il moto poi si inverte, con il corpo che scende dal piano inclinato e prosegue allontanandosi orizzontalmente. Calcolare:

1. La velocità del corpo nell'istante in cui incontra la molla.
2. La massima compressione della molla.
3. Lo spazio l_1 dalla base del piano inclinato che il corpo percorre una volta tornato a terra prima di fermarsi.



v_h (m/s)	0.3	1.4	2.1	7.9
x_{max} (m)	0.05	0.16	0.11	0.21
l_1 (m)	1.6	2.3	3.5	9.2

Il corpo si muove sul piano orizzontale scabro, il teorema dell'energia cinetica dice che la differenza di questa quantità (tra lo stato finale e quello iniziale) è uguale al lavoro delle forze dissipative. Quando il corpo sale sul piano inclinato, liscio, la sua energia meccanica si conserva per cui la variazione di energia cinetica sarà uguale alla variazione di energia potenziale della forza peso. Preso il riferimento 0 dell'energia potenziale al livello del piano orizzontale si ha:

$$\frac{1}{2}mv_h^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_D mg \cdot l_0$$

$$\frac{1}{2}v_h^2 = \frac{1}{2}v_0^2 - gh - \mu_D g \cdot l_0$$

$$v_h = \sqrt{v_0^2 - 2gh - 2\mu_D g \cdot l_0} = 1.369 \approx 1.4m/s$$

La massima compressione della molla si avrà quando il corpo ha ceduto tutta la sua energia cinetica che si è trasformata in energia potenziale gravitazionale e in energia potenziale della molla:

$$\frac{1}{2}kx^2 + mgx\sin\vartheta = \frac{1}{2}mv_h^2$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + mgx\sin\vartheta - \frac{1}{2}mv_h^2 = 0$$

$$x^2 + \frac{2mg\sin\vartheta}{k}x - \frac{mv_h^2}{k} = 0 \qquad x = 0.11m$$

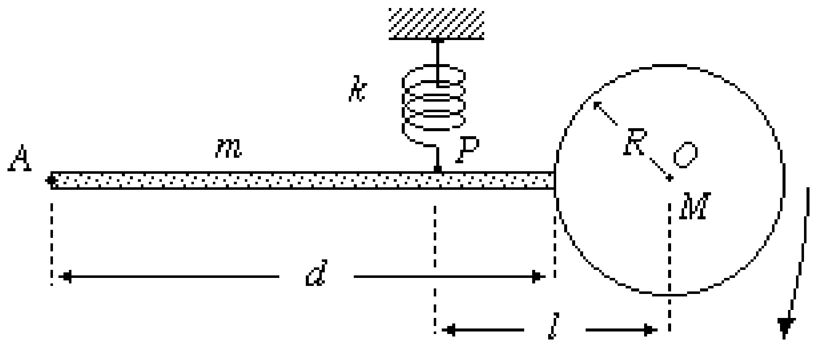
Raggiunta la massima compressione della molla, il corpo ricomincia a scendere sul piano inclinato e raggiungerà il piano orizzontale con la stessa energia cinetica con cui lo aveva lasciato. Lo spazio che potrà percorrere sul piano scabro è ancora dato dal teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mu_D mgl_0 = \mu_D mgl_1$$

$$l_1 = \frac{v_0^2}{2\mu_D g} - l_0 \qquad l_1 = 2.304 \approx 2.3m$$

Esercizio 3

Un corpo rigido e' costituito da una sfera di massa M = 0.8 kg e raggio R = 5 cm e da un'asta sottile di massa m = 1.77 kg e lunghezza d=35 cm, fissata solidalmente alla sfera ad una delle sue estermita'. Il corpo rigido puo ruotare senza attrito in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale A passante per l'estremita' dell'asta opposta alla sfera.
Inizialmente il corpo rigido e' fermo con l'asta in posizione orizzontale, sostenuto da una molla di costante elastica k = 200 N m , attaccata in un punto P posto alla distanza l = 7.5 cm dal centro della sfera. Calcolare 1) l'estensione della molla; 2) la forza esercitata dal perno sull'asta nel punto A.
Ad un certo istante la molla viene tolta e il corpo rigido inizia a ruotare attorno al perno A. Calcolare 3) la velocita' del centro O della sfera al momento in cui questa raggiunge il punto piu' basso.



1) estensione della molla x
2) forza in A F_A
3) velocita del centro O della sfera v

x(m)	0.31	0.043	0.14	0.095
F_A(N)	15.3	6.2	3.6	0.45
v_O(m/s)	3.13	5.76	1.34	8.38

Il corpo rigido è costituito dalla somma di due corpi rigidi. Per prima cosa bisogna individuare il centro di massa del sistema composto. Prendendo come origine delle coordinate il punto A si ha:

$$x_{CM} = \frac{m\frac{d}{2} + M(d+R)}{M+m} = 0.245m$$

L'equilibrio statico si calcola uguagliando a zero la prima e la seconda equazione cardinale (utilizzando come polo il punto A per cui passa l'asse di rotazione).Le forze sono tutte verticali, quindi anche la reazione sull'asse lo sarà.

$F + Kx - (M + m)g = 0 \qquad (M + m)gx_{CM} - Kx(d + R - l) = 0$

$$x = \frac{(M + m)gx_{CM}}{K(d + R - l)} = 0.095m$$

$$F = (m + M)g - Kx = 6.197N$$

Quando viene rimossa la molla il corpo rigido ruota sotto l'azione della sua forza peso. Il suo moto è dettato dalla seconda equazione cardinale, il momento di inerzia per rotazione attorno all'asse che passa per A è quello del corpo composto dall'asta e dalla sfera:

$$I = \frac{1}{3}md^2 + \frac{2}{5}MR^2 + (d + R)^2 M = 0.201kgm^2 \qquad (M + m)gx_{CM} = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{(M + m)gx_{CM}}{I} = 30.693rad / s^2$$

La velocità angolare nel punto più basso si calcola dalla conservazione dell'energia meccanica e la velocità lineare del centro della sfera si ottiene considerando che questo punto ruota a distanza d+R dall'asse di rotazione.

$$(M + m)gx_{CM} = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{2(M + m)gx_{CM}}{I}} = 7.835rad / s \qquad v = \omega(d + R) = 3.134m / s$$