FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica
Canale ....
Compitino del 9 maggio 2009

Esercizio 1

Un sasso viene lanciato dall'origine delle coordinate con velocità v_0=20 m/s, dopo t=1.5 s colpisce un bersaglio e in quell'istante la sua velocità vale v=19.17 m/s. Si trascurino tutti gli attriti.
Si determinino:

- l'angolo di alzo α,
- la coordinata y del bersaglio (rispetto al punto di lancio)
- la gittata massima se il proiettile non colpisse il bersaglio

α(gradi)	11	25	67	43
y(m)	1.65	4.30	9.97	14.2
x_{max}(m)	6.9	83.2	12.5	31.3

Scelto un sistema di riferimento con l'origine nel punto di lancio, le componenti della velocità del proiettile e la formula del modulo quadro della velocità in ogni istante del moto sono date da:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 sen\alpha - gt \end{cases} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad v^2 = (v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 sen\alpha - gt)^2$$

Dalle equazioni di sopra, in serendo i dati del problema, si ricava:

$$v^2 = v_0^2 - 2v_0 gt sen\alpha + g^2 t^2 \quad \Rightarrow \quad sen\alpha = \frac{v_0^2 - v^2 + (gt)^2}{2v_0 gt} = 0.4227 \qquad \alpha = 25°$$

La coordinata y del bersaglio e la gittata sono quindi:

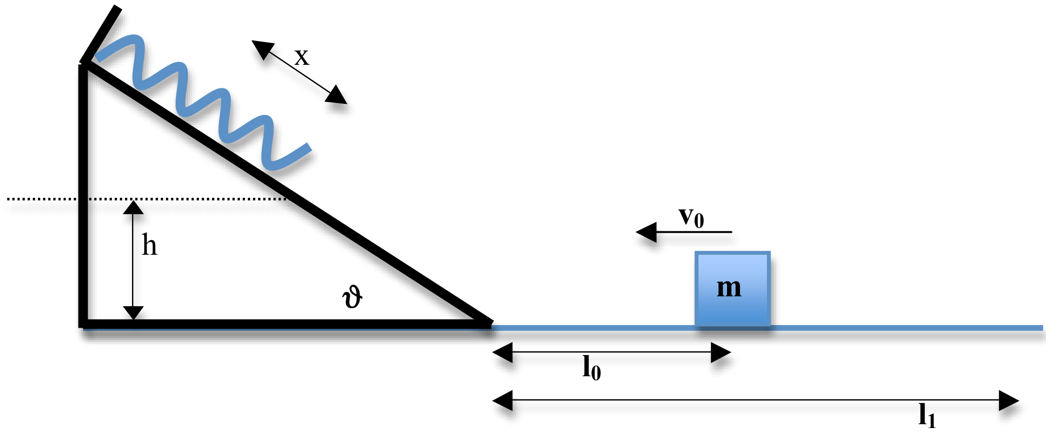
$$y = v_0 sen\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 = 1.65m \qquad x_{max} = \frac{2v_0^2}{g} sen\alpha \cos\alpha = 31.28m$$

Esercizio 2

Un corpo di massa $m = 1.4kg$ si sta muovendo su un piano orizzontale scabro con coefficiente d'attrito dinamico $\mu_D = 0.15$, con una velocità iniziale v_0. Dopo aver percorso una distanza $l_0 = 1.2m$ comincia a salire su un piano inclinato con angolo alla base $\vartheta = 30°$, senza attrito. Dopo essere salito di una quota $h = 20cm$, dove si misura una velocità $v_h = 1.3m/s$, il corpo incontra una molla inizialmente a riposo che lo frena ulteriormente fino a fermarlo. Il moto poi si inverte, con il corpo che scende dal piano inclinato e prosegue allontanandosi orizzontalmente. Calcolare:

1. La velocità iniziale del corpo.
2. La costante elastica k della molla se la massima compressione è $x = 8cm$

3. Lo spazio l_1 dalla base del piano inclinato che il corpo percorre una volta tornato a terra prima di fermarsi.



v_0(m/s)	0.7	9.4	1.1	3.0
k (N/m)	198	260	91	455
l_1 (m)	1.3	2.3	3.5	1.9

Il corpo si muove sul piano orizzontale scabro, il teorema dell'energia cinetica dice che la differenza di questa quantità (tra lo stato finale e quello iniziale) è uguale al lavoro delle forze dissipative. Quando il corpo sale sul piano inclinato, liscio, la sua energia meccanica si conserva per cui la variazione di energia cinetica sarà uguale alla variazione di energia potenziale della forza peso. Preso il riferimento 0 dell'energia potenziale al livello del piano orizzontale si ha:

$$\frac{1}{2}mv_h^2 + mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_D mg \cdot l_0$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v_h^2 + gh + \mu_D g \cdot l_0$$

$$v_0 = \sqrt{v_h^2 + 2gh + 2\mu_D g \cdot l_0} = 3.023 m/s$$

La massima compressione della molla si avrà quando il corpo ha ceduto tutta la sua energia cinetica che si è trasformata in energia potenziale gravitazionale e in energia potenziale della molla:

$$\frac{1}{2}kx^2 + mgx\sin\vartheta = \frac{1}{2}mv_h^2$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_h^2 - mgx\sin\vartheta$$

$$k = \frac{mv_h^2 - 2mgx\sin\vartheta}{x^2} = 198.19 N/m$$

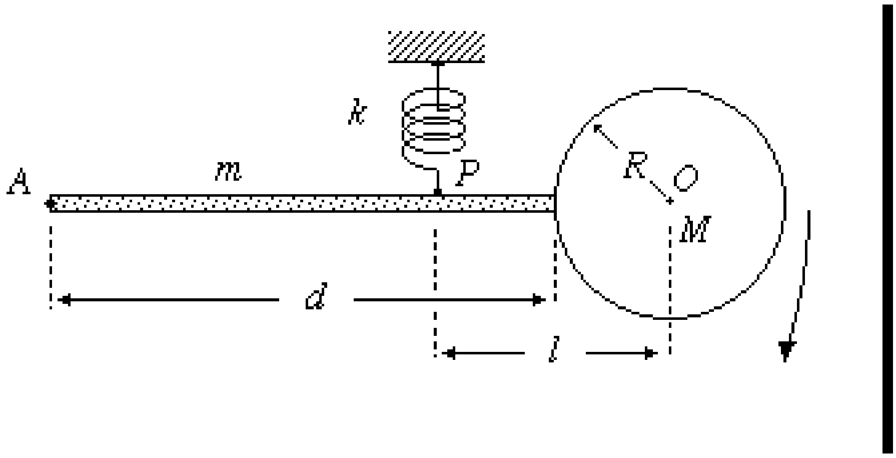
Raggiunta la massima compressione della molla, il corpo ricomincia a scendere sul piano inclinato e raggiungerà il piano orizzontale con la stessa energia cinetica con cui lo aveva lasciato. Lo spazio che potrà percorrere sul piano scabro è ancora dato dal teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_h^2 + mgh = \mu_D mgl_1$$

$$l_1 = \frac{v_h^2}{2\mu_D g} + \frac{h}{\mu_D} = 1.908m$$

Esercizio 3

Un corpo rigido e' costituito da un disco di massa M = 0.6 kg e raggio R = 5.6 cm e da un'asta sottile di massa m = 2.35 kg e lunghezza d=30 cm, fissata solidalmente al disco ad una delle sue estermita'. Il corpo rigido puo' ruotare senza attrito in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale A passante per l'estremita' dell'asta opposta al disco.
Inizialmente il corpo rigido e' fermo con l'asta in posizione orizzontale, sostenuto da una molla di costante elastica k = 200 N m, attaccata in un punto P posto alla distanza l = 9 cm dal centro del disco. Calcolare 1) l'estensione della molla; 2) la forza esercitata dal perno sull'asta nel punto A.
Ad un certo istante la molla viene tolta e il corpo rigido inizia a ruotare attorno al perno A. Calcolare 3) la velocita' del centro O del disco al momento in cui questo raggiunge il punto piu' basso.



1) estensione della molla x
2) forza in A F_A
3) velocita del centro O della sfera v

x(m)	0.104	0.044	0.187	0.234
F_A(N)	16.3	7.23	8.05	2.44
v_O(m/s)	4.43	3.09	2.04	8.48

Il corpo rigido è costituito dalla somma di due corpi rigidi. Per prima cosa bisogna individuare il centro di massa del sistema composto. Prendendo come origine delle coordinate il punto A si ha:

$$x_{CM} = \frac{m\frac{d}{2} + M(d+R)}{M+m} = 0.192m$$

L'equilibrio statico si calcola uguagliando a zero la prima e la seconda equazione cardinale (utilizzando come polo il punto A per cui passa l'asse di rotazione).Le forze sono tutte verticali, quindi anche la reazione sull'asse lo sarà.

$$F + Kx - (M+m)g = 0 \qquad (M+m)gx_{CM} - Kx(d+R-l) = 0$$

$$x = \frac{(M+m)gx_{CM}}{K(d+R-l)} = 0.104m$$

$$F = (m+M)g - Kx = 8.054N$$

Quando viene rimossa la molla il corpo rigido ruota sotto l'azione della sua forza peso. Il suo moto è dettato dalla seconda equazione cardinale, il momento di inerzia per rotazione attorno all'asse che passa per A è quello del corpo composto dall'asta e dal disco:

$$I = \frac{1}{3}md^2 + \frac{1}{2}MR^2 + (d+R)^2 M = 0.147kgm^2 \qquad (M+m)gx_{CM} = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{(M+m)gx_{CM}}{I} = 37.617rad/s^2$$

La velocità angolare nel punto più basso si calcola dalla conservazione dell'energia meccanica e la velocità lineare del centro del disco si ottiene considerando che questo punto ruota a distanza *d*+*R* dall'asse di rotazione.

$$(M+m)gx_{CM} = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{2(M+m)gx_{CM}}{I}} = 8.674rad/s \qquad v = \omega(d+R) = 3.088m/s$$