



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica-Meccatronica

Canale

Compito del 6 giugno 2009

ROSA

Un disco omogeneo di raggio $R=0.4\text{m}$ e massa $M=1.6\text{ kg}$ è vincolato a ruotare senza attrito su un piano verticale attorno ad un suo estremo. Inizialmente è posto in equilibrio (instabile) in verticale sopra il vincolo.

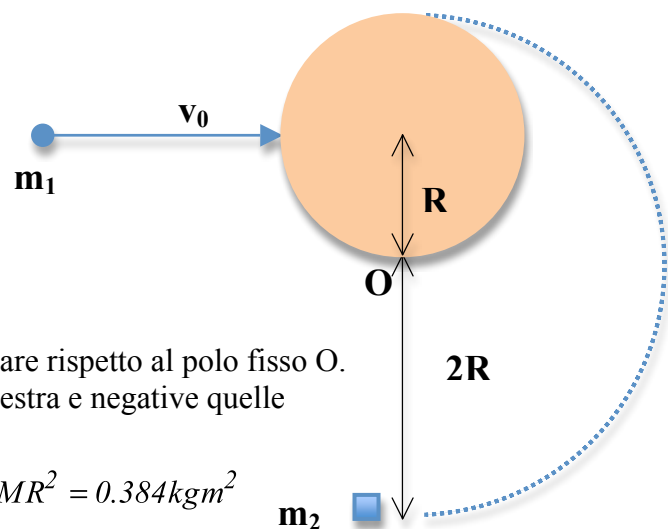
Un proiettile di massa $m_1=50\text{g}$ che si muove orizzontalmente con velocità $v_0 = 3.2\text{m/s}$ urta il disco all'altezza del suo centro e rimbalza all'indietro sempre con velocità orizzontale. Se si osserva che il modulo della velocità angolare del disco immediatamente dopo l'urto è $\omega=0.19\text{ rad/s}$

1. Calcolare la velocità con cui il proiettile rimbalza

Dopo l'urto il disco prosegue il suo moto di rotazione attorno al vincolo, e quando si trova nel punto più basso l'estremità libera del disco urta un'altra massa $m_2=300\text{g}$, inizialmente ferma, in modo completamente inelastico. Calcolare:

2. La velocità angolare del disco subito dopo il secondo urto
3. La variazione di energia in quest'urto

| | | | | |
|--------------------|--------|--------|-------|--------|
| v_R (m/s) | -0.448 | -0.973 | -3.65 | -0.161 |
| ω_2 (rad/s) | 1.41 | 5.39 | 0.78 | 7.45 |
| ΔE (J) | -1.47 | -4.18 | -18.2 | -41.7 |



Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto al polo fisso O. Assumendo positive le velocità verso destra e negative quelle opposte si ha:

$$-m_1 v_0 R = -I\omega + m_1 v_R R \quad I = \frac{3}{2}MR^2 = 0.384\text{kgm}^2$$

$$v_R = \frac{I\omega}{m_1 R} - v_0 = 0.448\text{m/s}$$

Dopo l'urto il moto si svolge sotto l'azione di forze conservative, per cui si conserva l'energia meccanica. Ponendo lo 0 dell'energia potenziale gravitazionale nel polo O si ha:

$$E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 + MgR = E_f = \frac{1}{2}I\omega_1^2 - MgR \Rightarrow \omega_1^2 = \omega^2 + 4\frac{MgR}{I} = 65.37\text{rad}^2/\text{s}^2$$

$$\omega_1 = 8.08\text{rad/s}$$

Di nuovo, nell'urto anelastico si conserva il momento angolare rispetto al polo O:

$$I\omega_1 = \omega' (I + m_2 4R^2) \Rightarrow \omega' = \frac{I}{I + m_2 4R^2} \omega_1 = 5.39\text{rad/s}$$

L'energia dissipata nell'urto é:

$$\Delta E = \frac{I}{2} \left(I + 4m_2 R^2 \right) \omega^2 - \frac{I}{2} I \omega_i^2 = -4.18 J$$

Una massa M di acqua liquida a $t_0=50^\circ\text{C}$ e alla pressione $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ viene portata allo stato di vapore alla temperatura $t_F = 120^\circ\text{C}$ con una trasformazione a pressione costante, a questa temperatura il vapore d'acqua (da trattare come un gas ideale in tutta la fase vapore) occupa un volume $V=0.8 \text{ m}^3$. Determinare (utilizzando i dati sotto riportati):

- La massa M dell'acqua
- il lavoro fatto nella trasformazione liquido-vapore, considerando trascurabile il volume del liquido
- l'ulteriore lavoro fatto per raggiungere la temperatura t_F
- la variazione della funzione di stato energia interna dell' acqua tra lo stato iniziale a $t_0=50^\circ\text{C}$ e quello finale a $t_F = 120^\circ\text{C}$

Calore specifico acqua liquida tra t_0 e t_F $c_p = 4.186 \times 10^3 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$

Calore latente di evaporazione a 100°C $\lambda = 2256 \times 10^3 \text{ J/kg}$

Capacità termica a pressione costante del vapore d'acqua tra 100°C e 120°C $C_p = 34.32 \text{ J/gmole K}$

Grammo-mole di acqua $M_{\text{acq}}=18 \text{ g}$

Si trascuri la dilatazione termica dell'acqua liquida

| | | | | |
|-----------------|-------|------|-------|-------|
| M (kg) | 0.93 | 0.44 | 0.64 | 0.22 |
| W_2 (kJ) | 85.0 | 93.1 | 76.7 | 61.2 |
| W_3 (kJ) | 7.2 | 3.5 | 4.11 | 1.44 |
| ΔU (kJ) | 956.0 | 1033 | 450.0 | 808.0 |

Alla temperatura T_F il vapore d'acqua può essere considerato un gas ideale, per cui si può applicare l'equazione di stato:

$$n = \frac{p_0 V}{RT_F} = 24.73 \text{ moli} \Rightarrow M = n \cdot 18 = 445.14 \text{ g}$$

Si può considerare il processo come suddiviso in tre stadi successivi: il riscaldamento dell'acqua liquida fino alla temperatura di ebollizione, la vaporizzazione a temperatura costante e il successivo riscaldamento del gas (considerato ideale) fino alla temperatura finale.

Nel primo processo non c'è lavoro, nel secondo e nel terzo processo il vapore, prima, e il gas ideale, poi, si espandono contro la pressione esterna:

$$W_1 = 0$$

$$W_2 = p_0 \Delta V_1 = nRT = 76.69 \text{ kJ} \Rightarrow W_{\text{tot}} = W_2 + W_3 = nR(T_F - 373 + 373) = 80.8 \text{ kJ}$$

$$W_3 = p_0 \Delta V_2 = nR(T_F - 373) = 4.11 \text{ kJ}$$

I calori scambiati nei tre processi sono:

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \begin{cases} Q_1 = M c_p (100 - 50) = 93138.5 \text{ J} = 93.14 \text{ kJ} \\ Q_2 = M \lambda = 0.445 \cdot 2256 \cdot 10^3 = 1.003920 \text{ J} = 1004 \text{ kJ} \\ Q_3 = n C_p (T_F - 373) = 16974.7 \text{ J} = 17 \text{ kJ} \end{cases} \quad Q_{\text{tot}} = 1114.14 \text{ kJ}$$

di conseguenza la variazione di energia interna nell'intero processo è:

$$\Delta U_{\text{tot}} = Q_{\text{tot}} - W_{\text{tot}} \quad \Delta U_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 - W_2 - W_3 = 1033.34 \text{ kJ}$$

Un sistema contenente $n=3.4$ moli di gas ideale monoatomico compie un ciclo ABCDA costituito da due isoterme reversibili (AB e CD) e da due isocore (BC e DA). Durante il ciclo il gas è a contatto unicamente con i due serbatoi termici, rispettivamente a temperature $T_1=280$ K e $T_2 > T_1$. Lungo l'isocora DA il gas scambia con il serbatoio a temperatura T_2 il calore $Q_{DA}=8345$ J. Sapendo che in B il gas è a pressione atmosferica ($P_B=10^5$ Pa), mentre $P_A=12.5 P_B$, calcolare:

- La temperatura della sorgente calda T_2
- il lavoro prodotto in un ciclo
- le quantità di calore assorbite o cedute dal gas lungo le trasformazioni isoterme
- il rendimento del ciclo

| | | | | |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| T_2 (K) | 514.5 | 476.8 | 425.7 | 398.1 |
| W (kJ) | 14.05 | 27.3 | 12.7 | 18.0 |
| Q_{AB} (kJ) | 34.04 | 28.7 | 40.2 | 27.8 |
| Q_{CD} (kJ) | -18.2 | -20.0 | -15.8 | -23.7 |
| η | 0.366 | 0.331 | 0.41 | 0.28 |

Le trasformazioni che compongono il ciclo, gli stati di equilibrio e i valori delle variabili di stato si possono schematizzare nel modo seguente:

AB isoterma reversibile a T_2
 BC isocora irreversibile
 CD isoterma reversibile a T_1
 DA isocora irreversibile

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 3.4 \\ p_A = 12.5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ T_A = T_2 \\ V_A = \frac{nRT_2}{p_A} = ? \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} n = 3.4 \\ p_B = 10^5 \text{ Pa} \\ T_B = T_2 \\ V_B = \frac{nRT_2}{p_B} = \frac{V_A}{12.5} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} n = 3.4 \\ p_C = ? \\ T_C = T_1 = 280 \text{ K} \\ V_C = V_B \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} n = 3.4 \\ p_D = ? \\ T_D = T_1 \\ V_D = V_A \end{array} \right.$$

Il calore scambiato nelle isocore è:

$$Q = nC_V(T_F - T_I) \quad Q_{DA} = nC_V(T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 = \frac{Q_{DA}}{nC_V} + T_1 = 476.8 \text{ K}$$

$$Q_{BC} = -Q_{DA} = -8345 \text{ J}$$

Nelle isoterme reversibili il calore scambiato è uguale al lavoro fatto dal gas:

$$W_{AB} = Q_{AB} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_2 \ln(12.5) = 34.04 \text{ kJ}$$

$$W_{CD} = Q_{CD} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -19.99 \text{ kJ} = -20 \text{ kJ}$$

$$W_{tot} = W_{AB} + W_{CD} = 14.05 \text{ kJ}$$

Il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{W_{tot}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0.331$$