# FACOLTA' DI INGEGNERIA

*Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,*
*Meccanica- Meccatronica*
*Canale ...........*
*Compito dell'8 luglio 2009*

## ROSA

Su un piano scabro, inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale, è posto in quiete un corpo (assimilabile a un punto materiale) di massa $m_1$=1 kg. Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è $\mu_{1d}$=0.4. Un altro corpo di massa $m_2$=$m_1$ viene lanciato dalla sommità del piano verso $m_1$ con velocità $v_0$=0.05 m/s (parallela al piano stesso). Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo $m_2$ e il piano è $\mu_{2d}$=0.3. Dopo un tempo t=0.9 s il corpo 2 urta in modo completamente anelastico il corpo 1.
Si determinino:

1) La forza di attrito statico tra corpo $m_1$ e piano.
2) La distanza percorsa lungo il piano da $m_2$ prima di urtare $m_1$.
3) La velocità comune alle due masse subito dopo l'urto.
4) L'accelerazione con cui le due masse unite si muovono dopo l'urto.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $F_{Att}$ [N] | 4.90 | 1.23 | 8.79 | 6.30 |
| d [m] | 2.2 | 1.0 | 0.75 | 1.32 |
| v [m/s] | 1.08 | 2.38 | 0.87 | 0.45 |
| a [m/s$^2$] | 0.62 | 3.56 | 4.32 | 1.93 |

1-Il corpo $m_1$ è in equilibrio statico, la sua equazione del moto è:

$$0 = m_1 a_1 = m_1 g sen\alpha - F_{att} \Rightarrow F_{att} = m_1 g sen\alpha = 4.9N$$

2- L'accelerazione con cui scende il corpo 2 è data da:

$$m_2 a_2 = m_2 g sen\alpha - \mu_{2d} m_2 g \cos\alpha \Rightarrow a_2 = g sen\alpha - \mu_{2d} g \cos\alpha = 2.35m/s^2$$

$$\Rightarrow d = v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 = 0.998m = 1m$$

$$v = v_o + at = 2.17m/s$$

3- nell'urto la quantità di moto del sistema si conserva, prima dell'urto solo la massa $m_2$ ha quantità di moto diversa da 0 quindi:

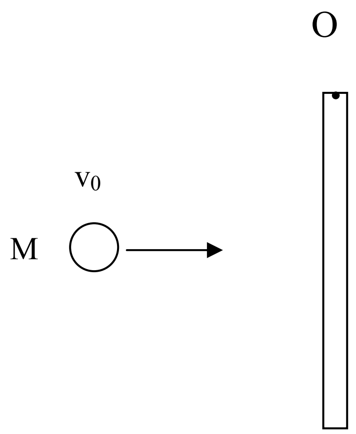
$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_{CM} \qquad v_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{v}{2} = 1.08m/s$$

4- La forza F è interna al sistema, e l'accelerazione con cui i corpi scendono è quella del CM del sistema. Le equazioni del moto di 1 e 2 si possono scrivere:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g sen\alpha - \mu_{1d} m_1 g \cos\alpha + F \\ m_2 a = m_2 g sen\alpha - \mu_{2d} m_2 g \cos\alpha - F \end{cases} \Rightarrow a = g sen\alpha - g\cos\alpha \frac{\mu_{2d} + \mu_{1d}}{2} = 1.93m/s^2$$

Un'asta sottile di lunghezza L=1m e massa m=2kg, posata su un piano orizzontale liscio, ruota senza attrito in senso orario attorno a un asse verticale passante per il suo estremo O, con velocità angolare $\omega_0$=3rad/s.
Ad un certo istante, un proiettile di massa M=4kg con velocità $v_0$=5m/s colpisce perpendicolarmente l'asta nella posizione del centro di massa di quest'ultima e vi rimane conficcato.
Determinare:

1) La velocità angolare del sistema costituito dall'asta e dal proiettile dopo l'urto;
2) L'energia dissipata durante l'urto;
3) La reazione vincolare che si esplica nel punto O immediatamente dopo l'urto.




| \|ω\| [rad/s] | 4.8 | 5.6 | 2.1 | 6.7 |
|---|---|---|---|---|
| $E_{diss}$ [J] | 45.6 | 33.8 | 12.5 | 21.3 |
| R [N] | 45.2 | 23.4 | 4.21 | 69.12 |

L'asta è vincolata a ruotare attorno al punto O in un piano orizzontale liscio. Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto al vincolo.

$$\vec{L}_O = cost. \qquad L_{o,i} = -I\omega_0 + Mv_0\frac{L}{2} \qquad L_{o,f} = I'\omega'$$

$$I = \frac{mL^2}{3} = 0.667kgm^2 \qquad I' = \frac{mL^2}{3} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 1.667kgm^2$$

$$\omega' = \frac{-I\omega_0 + Mv_0\frac{L}{2}}{I'} = 4.8rad/s$$

Dopo l'urto il sistema ruota in verso antiorario.
Per calcolare l'energia dissipata nell'urto:

$$\Delta E = E_f - E_i \qquad E_i = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_o^2 = 53J \qquad E_f = \frac{1}{2}I'\omega'^2 = 19.2J$$

$$|\Delta E| = 33.8J$$

A seguito dell'urto il CM del sistema compie un moto circolare di raggio L/2. La reazione vincolare è la forza che permette questo moto.

$$(M+m)a_{CM} = (M+m)\omega'^2\frac{L}{2} = R \qquad R = 69.12N$$

**ESERCIZIO DI TERMODINAMICA PER STUDENTI IMMATRICOLATI NELL'A.A. 2008-2009 (Legge 270)**

Una mole di gas ideale biatomico si trova inizialmente alla pressione $p_A$=2.53 $10^5$ Pa. Tramite una trasformazione isoterma reversibile, in cui la variazione di entropia e' $\Delta S_{AB}$=1.855 J/K, si porta in uno stato di equilibrio in cui $V_B$=3.08 $10^{-2}$ $m^3$.
Successivamente il gas effettua una trasformazione adiabatica reversibile raggiungendo un nuovo stato di equilibrio in cui la temperatura vale $T_C$=690.8 K. Da questo stato il sistema ritorna alle condizioni iniziali prima effettuando una trasformazione isobara reversibile in cui cede il calore $Q_{CD}$ = -7000 J, poi tramite un'ulteriore trasformazione reversibile DA.

1) Si determini la temperatura iniziale $T_A$
2) Si determini la pressione, $p_B$ nel nuovo stato di equilibrio.
3) Si calcoli il volume nello stato D.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $T_A$ [K] | 1120 | 830 | 750 | 710 |
| $P_B$ [Pa] | $2.02\times10^5$ | $1.32\times10^5$ | $3.31\times10^5$ | $2.54\times10^5$ |
| $V_D$ [$m^3$] | $42.1\times10^{-3}$ | $24.6\times10^{-3}$ | $11.9\times10^{-3}$ | $67.1\times10^{-3}$ |

Considerando la formula della variazione di entropia del gas in una trasformazione isoterma e l'equazione di stato si ha:

$$\Delta S_{AB} = nR\,ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{V_B}{exp\left(\frac{\Delta S_{AB}}{nR}\right)} = 24.64 \cdot 10^{-3}\,m^3$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 749.8K \qquad p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 2.024 \cdot 10^5\,Pa$$

La trasformazione adiabatica reversibile è descritta dalle equazioni di Poisson, per cui:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = cost. \qquad \frac{\gamma}{1-\gamma} = -3.5$$

$$p_C = p_B\left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{-3.5} = 1.516 \cdot 10^5\,Pa = p_D$$

La trasformazione CD è una trasformazione isobara, da cui:

$$Q_{CD} = nC_p\left(T_D - T_C\right) \quad \Rightarrow \quad T_D = T_C + \frac{Q_{CD}}{nC_p} = 450.2K$$

$$V_D = \frac{nRT_D}{p_D} = 24.6 \cdot 10^{-3}\,m^3$$

**ESERCIZIO DI TERMODINAMICA PER STUDENTI IMMATRICOLATI PRIMA DELL'A.A. 2008-2009 (Legge 509)**

Una quantità n=0.5 moli di gas ideale monoatomico si trova in uno stato di equilibrio termodinamico A caratterizzato dalla pressione $p_A$ e dal volume $V_A = 5 \times 10^{-3}$ m$^3$. Il gas compie una trasformazione reversibile A -> B, rappresentata nel piano pV dalla retta

$$p = a + b\,V$$

con $a = 1.45 \times 10^5$ Pa $b = 2.91 \times 10^7$ Pa/m$^3$, fino a che raggiunge il volume $V_B = 1.5V_A$.

Si determinino

1. La variazione di energia interna del gas nella trasformazione A→B.
2. Il lavoro fatto dal gas nella trasformazione.
3. Il calore scambiato dal gas nella trasformazione.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta U_{AB}$ [J] | 514.5 | 1274.7 | 1907.8 | 938.1 |
| $W_{AB}$ [J] | 817.9 | 634.2 | 1123.1 | 512.3 |
| $Q_{AB}$ [J] | 2332.1 | 2725.7 | 3231.1 | 4412.3 |

Il gas si trova all'equilibri termodinamico sia in A che in B, sfruttando l'equazione di stato e l'equazione della trasformazione si ottiene:

$$A:\begin{cases} n = 0.5 \\ p_A = 2.905 \cdot 10^5\,Pa \\ V_A = 5 \cdot 10^{-3}\,m^3 \\ T_A = \dfrac{p_A V_A}{nR} = 349.4K \end{cases} \qquad B\begin{cases} n = 0.5 \\ p_B = 3.633 \cdot 10^5\,Pa \\ V_B = 1.5V_A = 7.5 \cdot 10^{-3}\,m^3 \\ T_B = \dfrac{p_B V_B}{nR} = 655.4K \end{cases}$$

$$\underline{\Delta U_{AB} = nc_V\left(T_B - T_A\right) = 1907.8J}$$

La trasformazione è reversibile per cui si ottiene:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} pdV = \int_{V_A}^{V_B} \left(p + aV\right)dV = a\left(V_B - V_A\right) + \frac{b}{2}\left(V_B^2 - V_A^2\right) = 817.9J$$

Dal primo principio della termodinamica si ottiene:

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} \qquad Q_{AB} = 2725.7J$$