Sorgenti delle onde EM

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Una carica stazionaria genera un campo elettrico costante

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j$$

- Una flusso di cariche a velocità costante (corrente stazionaria) genera un campo magnetico costante

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

- Una carica accelerata genera una corrente variabile nel tempo, quindi campo magnetico variabile nel tempo, quindi potenzialmente un campo elettrico variabile nel tempo ….

dipolo oscillante

- un dipolo oscillante armonicamente corrisponde ad una corrente che varia in modo armonico, e origina un'onda elettromagnetica
  - Le oscillazioni del campo si propagheranno con velocità c e quindi con una lunghezza d'onda

$$\lambda = cT$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

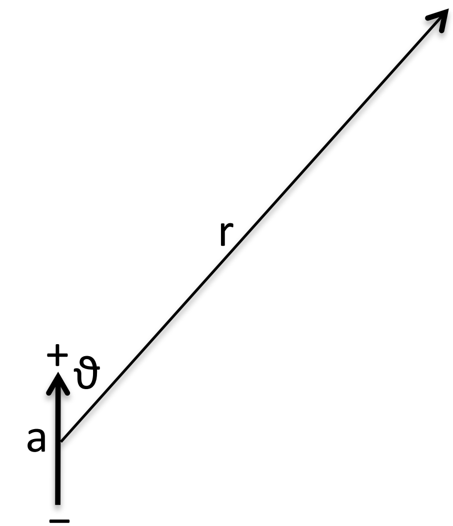
- la soluzione matematica è complessa, bisogna tenere conto della velocità di propagazione finita (pari a c) delle variazioni dei campi E e B (uso dei "potenziali ritardati")
- Usando la legge di Biot-Savart per calcolare il campo magnetico si possono ottenere le caratteristiche fondamentali della soluzione
  - il dipolo emette un'onda con ampiezza che decresce come 1/r
  - L'ampiezza è massima nel piano ortogonale al dipolo
  - l'ampiezza è proporzionale al quadrato della frequenza (potenza proporzionale alla quarta potenza della frequenza)

- Calcolo il campo magnetico di generato dall'elemento di corrente costituito dal dipolo oscillante. Lo penso come una corrente dovuta a una carica q_0 che si sposta per una lunghezza ds=a

$$p = qa = q_0 a \sin(\omega t) = p_0 \sin(\omega t)$$

$$q = q_0 \sin(\omega t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega \cos(\omega t)$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 q_0 \omega \cos(\omega t)}{4\pi} \frac{\vec{a} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 q_0 \omega \cos(\omega t)}{4\pi} \frac{a \sin(\vartheta)}{r^2} = \frac{\mu_0 p_0 \sin(\vartheta) \cos(\omega t)}{4\pi} \frac{\omega}{r^2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0 p_0 \sin(\vartheta) \sin(\omega t)}{4\pi} \frac{\omega^2}{r^2} = \frac{p_0 \sin(\vartheta) \sin(\omega t)}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r^2}$$

- Il rotore di E decresce come $1/r^2$. Integrando nelle coordinate spaziali per calcolare E si otterrà la proporzionalità a 1/r e le altre caratteristiche della radiazione di dipolo

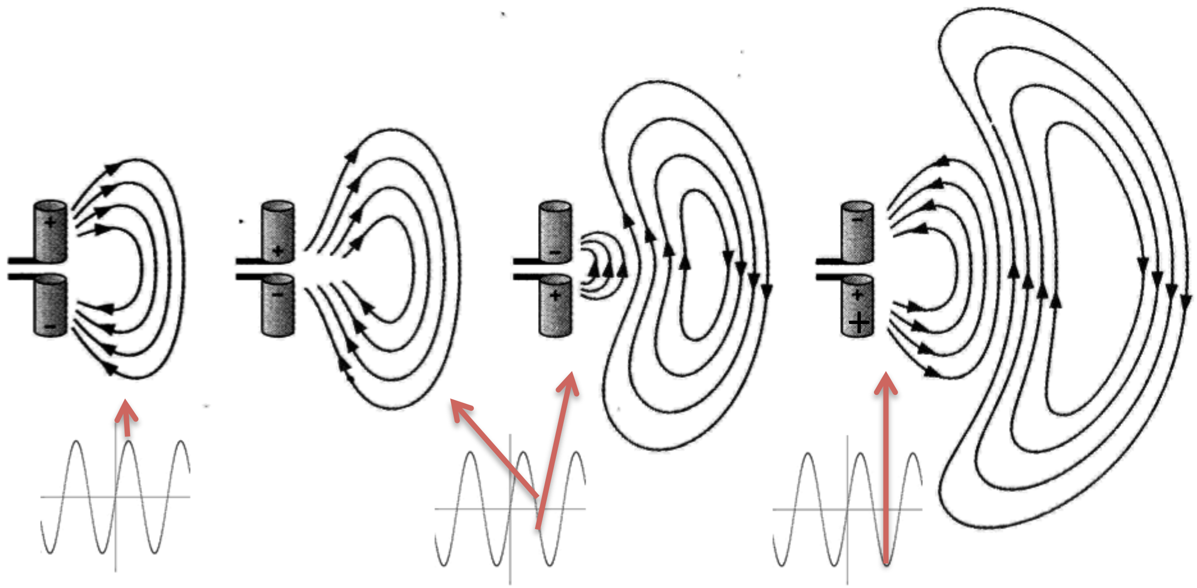
$$E \propto \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} \sin(\omega t) = \frac{\pi p_0 \sin(\vartheta)}{\varepsilon_0} \frac{1}{\lambda^2 r} \sin(\omega t) \qquad \left(\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda} c \right)$$

- La soluzione corretta che si ottiene con i calcoli completi è

$$E = \frac{\pi p_0 \sin(\vartheta)}{\varepsilon_0} \frac{1}{\lambda^2 r} \sin(kr - \omega t)$$

dipolo oscillante

- propagazione del campo E al variare del dipolo
  - nell'istante in cui dipolo si annulla il campo locale si azzera, ma non il campo a distanza



potenza emessa

- Ampiezza del campo elettrico

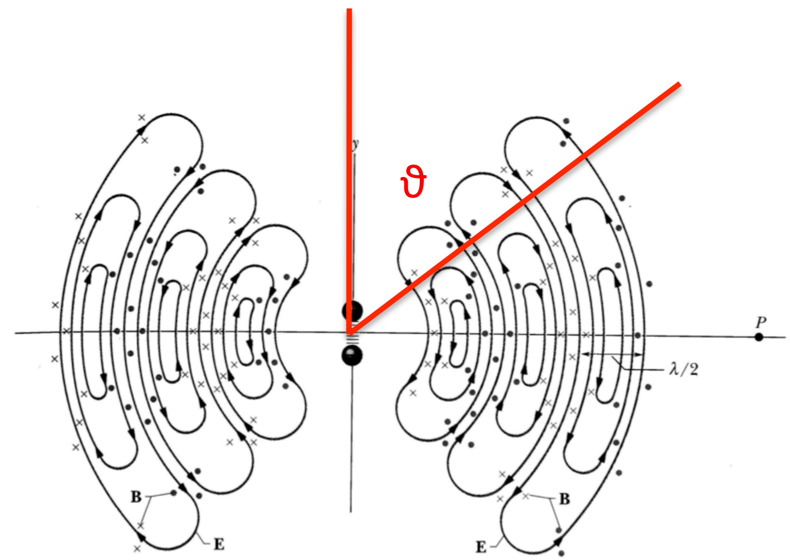
$$E_0 = \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\omega^2}{r} = \frac{\pi p_0 \sin(\vartheta)}{\varepsilon_0}\frac{1}{\lambda^2 r}$$

- L'intensità è

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{p_0^2 \sin^2(\vartheta)}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\omega^4}{r^2}$$

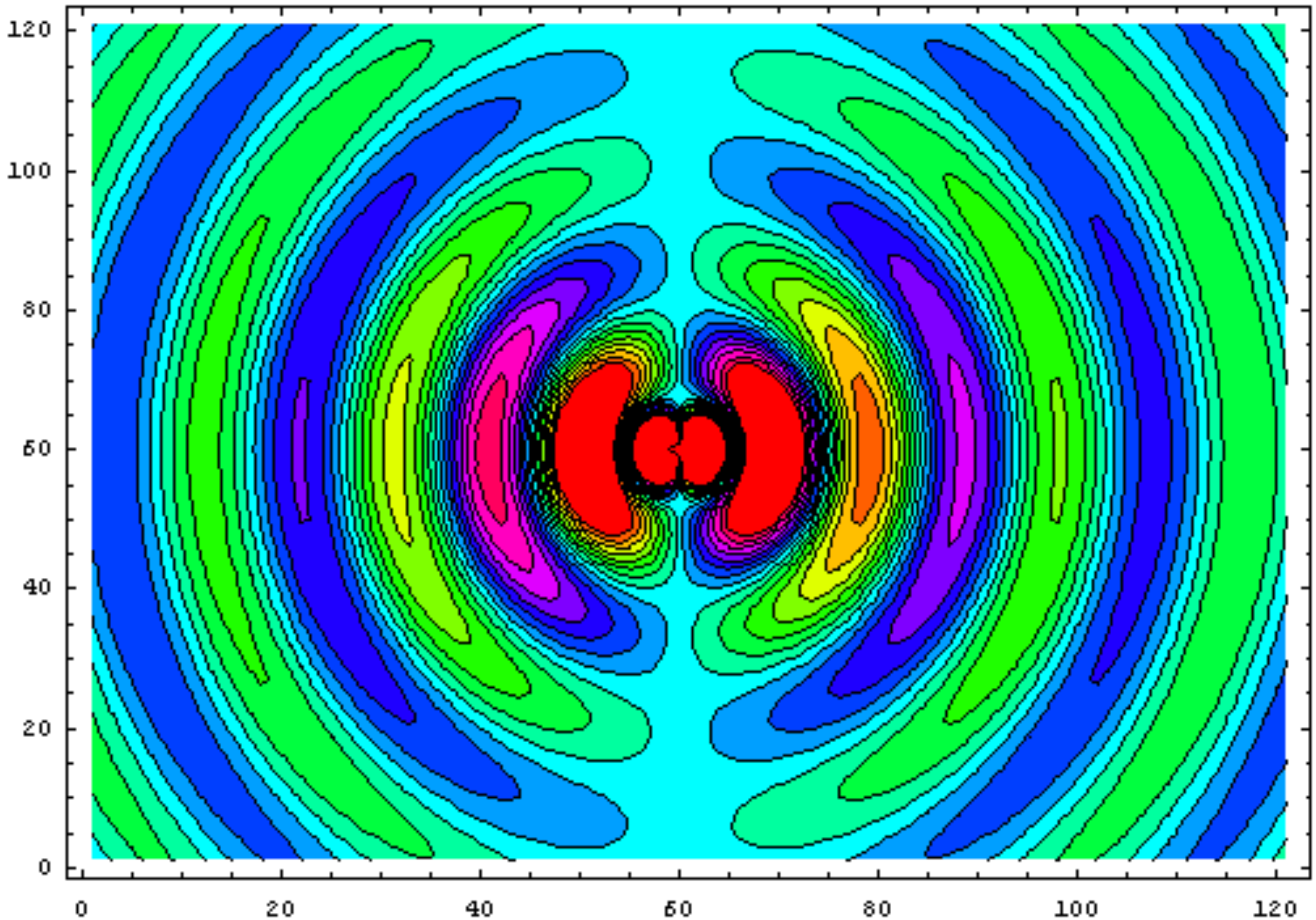
- se l'emissione fosse uniforme per ottenere la potenza basterebbe moltiplicare per la superficie della sfera ($4\pi r^2$). Ma c'è il termine $\sin(\vartheta)$ quindi bisogna integrare (in coordinate polari)

$$P = \int I\, d\Sigma = \int I r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi$$



- si ottiene

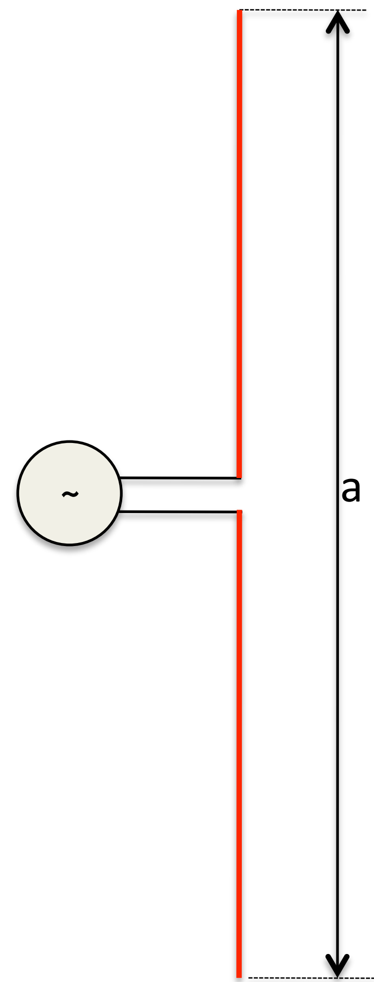
$$P = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\omega^4}{r^2}\sin^2(\vartheta) r^2 \sin d(\vartheta)\vartheta = 2\pi \cdot \frac{p_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_0^{\pi}\sin^3(\vartheta) d\vartheta = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$


0
20
40
60
80
100
120
0
20
40
60
80
100
120

Esempio

- Consideriamo un'antenna dipolare che emette onde radio
  - caratteristiche dell'antenna

$\upsilon = 27\,MHz$	frequenza
$a = \lambda / 2$	lunghezza dell'antenna
$i = i_0 \sin(\omega t)$ con $i_0 = 100\,mA$	corrente di alimentazione



- Calcolare
  - la potenza emessa
  - Il campo elettrico medio nel piano ortogonale al dipolo, ad 1 km di distanza

- calcoliamo il momento di dipolo p_0 data la corrente

$$p = p_0 \sin(\omega t) = a q_0 \sin(\omega t) \rightarrow p_0 = a q_0$$

$$\lambda \nu = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{27 \cdot 10^6} = 11.1 m$$

$$a = \frac{\lambda}{2} = 5.6 m$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d q_0 \sin(\omega t)}{dt} = q_0 \omega \sin(\omega t) \rightarrow i_0 = q_0 \omega \rightarrow q_0 = \frac{i_0}{\omega}$$

$$p_0 = a q_0 = \frac{a i_0}{\omega}$$

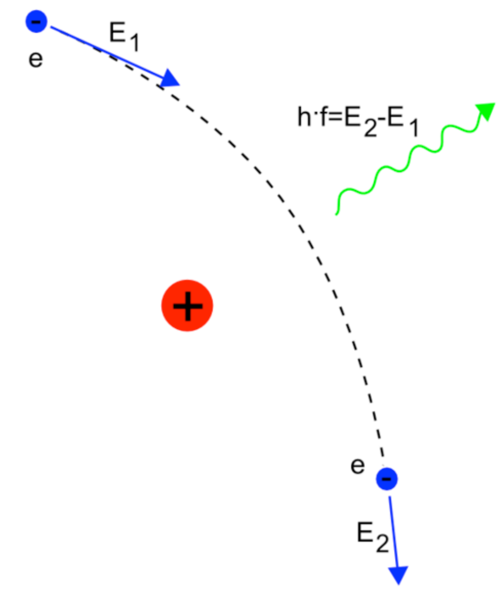
- sostituendo p_0 nella formula della potenza si ha

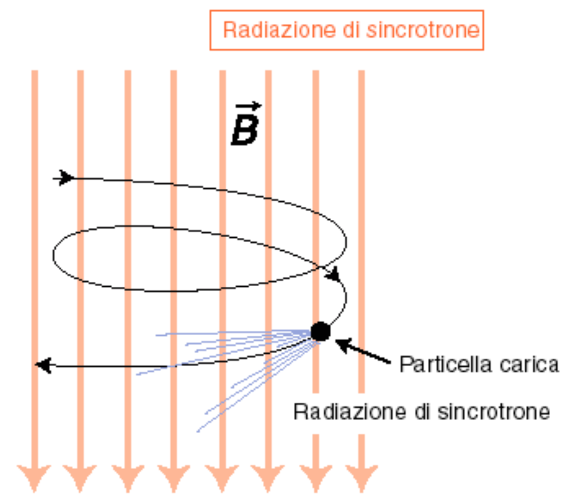
$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12 \pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{a^2 i_0^2 \omega^2}{12 \pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{5.6^2 \cdot 0.1^2 \cdot \left(2\pi \cdot 27 \cdot 10^6\right)^2}{12\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^3} = 1W$$

- L’ampiezza del campo elettrico a ϑ=90 a 1km di distanza è

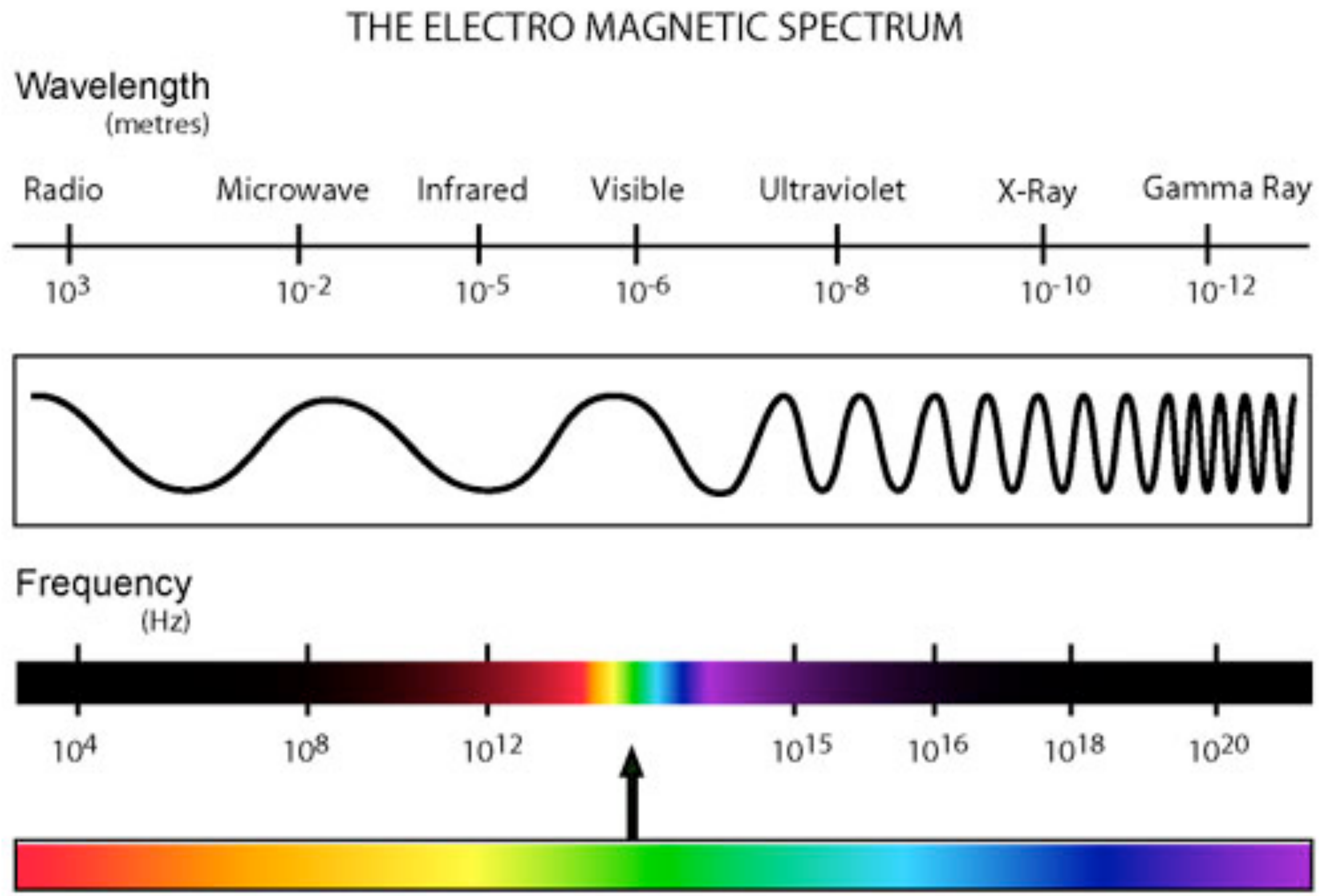
$$E_0 = \frac{p_0 \sin(\vartheta)}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{r} = \frac{a i_0 \sin(\vartheta)}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \frac{\omega}{r} = \frac{5.6 \cdot 0.1 \cdot \sin(90) \cdot 2\pi \cdot 27 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 1000} = 9.5\, mV/m$$

- Radiazione di frenamento
  - particelle cariche che vengono frenate urtando contro un bersaglio emettono radiazione
    - decelerazione nel campo elettrico del nucleo
  - è il metodo con cui vengono prodotti i raggi X
    - si usano elettroni in quanto più veloci a parità di energia cinetica
- Radiazione di sincrotrone
  - le particelle cariche curvate in un campo magnetico emettono radiazione di sincrotrone
    - è la causa principale di perdita di energia negli acceleratori (soprattutto con elettroni)
    - acceleratori usati spesso come sorgente di "luce di sincrotrone"





Spettro onde EM



propagazione delle onde EM in un mezzo

- consideriamo un mezzo trasparente
  - non conduttore, quindi anche non ferromagnetico

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{k_E \varepsilon_0 k_M \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_E k_M}} = \frac{c}{\sqrt{k_E k_M}}$$

$$k_M \approx 1 \qquad k_E \geq 1 \qquad \sqrt{k_E} = n \qquad n \geq 1$$

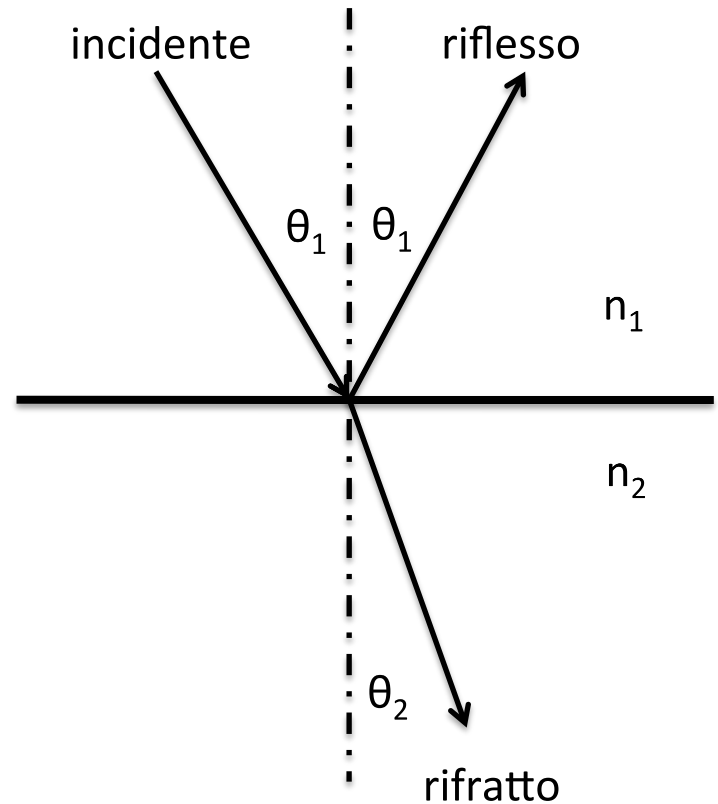
$$v = \frac{c}{n} \qquad v \leq c$$

- la luce nel mezzo è più lenta rispetto alla luce nel vuoto di un fattore n
  - n è l'indice di rifrazione

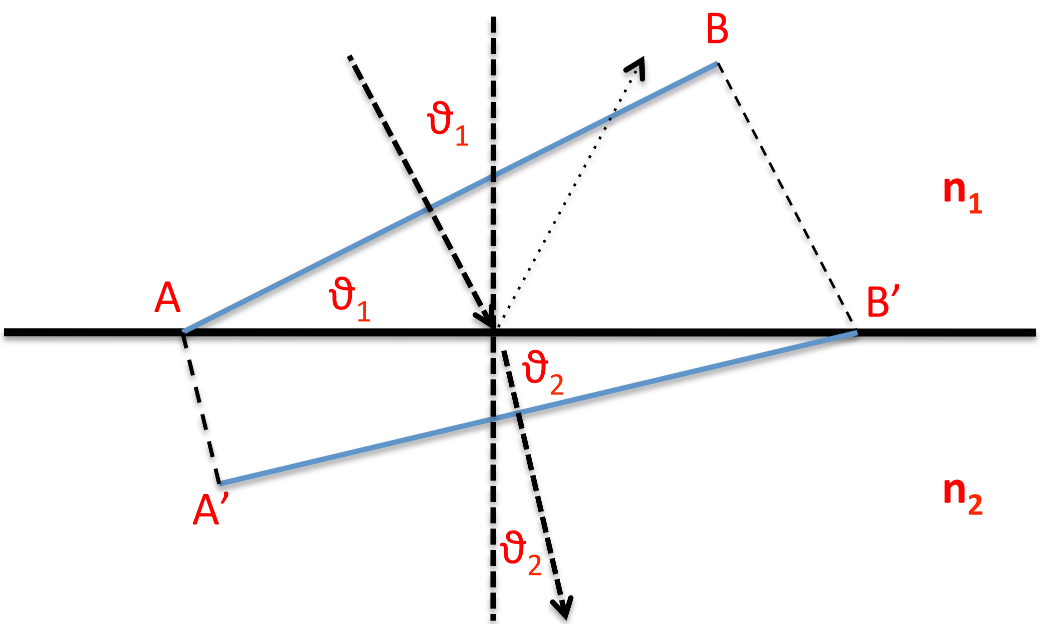
riflessione-rifrazione

- Un onda che incide sulla superficie di separazione tra due mezzi trasparenti di indici di rifrazione diversi (e.g. aria-acqua) subisce due fenomeni
  - riflessione:
    - angolo di riflessione = angolo di incidenza
  - rifrazione:
    - legge di Snell

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$



- Consideriamo un'onda piana che incide su una superficie di separazione tra due mezzi trasparenti con indice di rifrazione n_1 e n_2 ($n_2>n_1$)
- Nel tempo Δt che il fronte d'onda incidente impiega per andare da B a B', il fronte d'onda rifratto va da A ad A' (a velocità inferiore)



$$AB' = l$$

$$BB' = v_1 \Delta t = \frac{c}{n_1} \Delta t = l \sin(\theta_1)$$

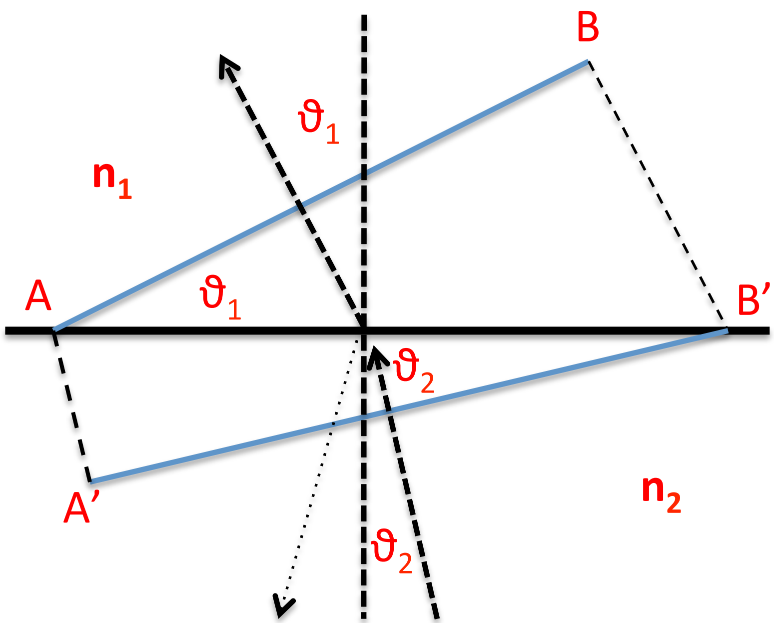
$$\Delta t = \frac{n_1 l \sin(\theta_1)}{c}$$

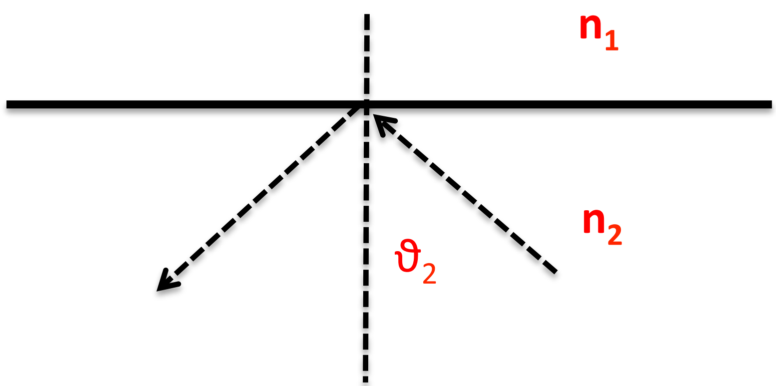
$$AA' = v_2 \Delta t = \frac{c}{n_2} \Delta t = l \sin(\theta_2)$$

$$\Delta t = \frac{n_2 l \sin(\theta_2)}{c}$$

$$\frac{n_1 l \sin(\theta_1)}{c} = \frac{n_2 l \sin(\theta_2)}{c}$$

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$





- la relazione vale anche andando da n_2 a n_1
  - in questo caso esiste un angolo θ_2 massimo, quando θ_1=90°

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n_2 \sin(\theta_{2,MAX})$$

$$\sin(\theta_{2,MAX}) = \frac{n_1}{n_2}$$

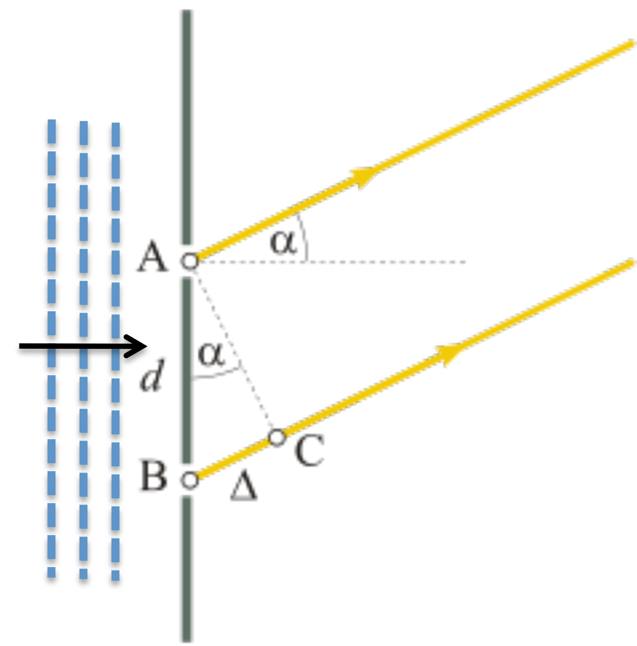
  - per angoli maggiori non si ha rifrazione
    - riflessione totale

interferenza

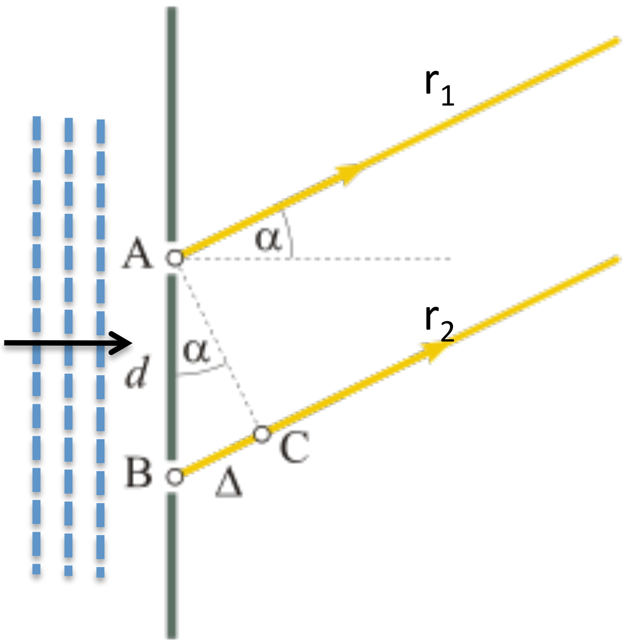
- Principio di sovrapposizione: una combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione.
  - Attenzione: si sommano i campi (ampiezze) e non le intensità luminsose (proporzionali al quadrato dell'ampiezza)
- Come calcolare l'intensità luminosa generata da due sorgenti puntiformi?
  - Supponiamo che i fori A e B siano illuminati da un'onda piana monocromatica e che quindi in A e B l'onda abbia la stessa ampiezza e fase

$$E_A = E_B = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

  - Ogni foro poi emette un'onda in tutte le direzioni (sorgente puntiforme, principio di Huygens-Fresnel, se il foro è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda)



- consideriamo i due raggi paralleli
  - a grande distanza o nel fuoco di una lente
  - l'intensità somma non è costante ma varia con l'angolo, tra 0 e 4 volte l'intensità del singolo raggio



$$E = E_1 + E_2 = E_0 \cos(kr_1 - \omega t) + E_0 \cos(kr_2 - \omega t)$$

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \omega t\right) \cos\frac{k(r_1 - r_2)}{2}$$

$$r_1 + r_2 \approx 2r_1 \qquad r_1 - r_2 = d\sin\alpha$$

$$E \approx 2E_0 \cos(kr_1 - \omega t) \cos\frac{kd\sin\alpha}{2}$$

$$I \propto E^2 = 4E_0^2 \cos^2(kr_1 - \omega t)\cos^2\frac{kd\sin\alpha}{2} \propto 4I_1\cos^2\frac{kd\sin\alpha}{2}$$

- I massimi di intensità si hanno per

$$\cos^2\frac{kd\sin\alpha}{2}=1\rightarrow\frac{kd\sin\alpha}{2}=n\pi\qquad(n=0,\pm1,\pm2.....)$$

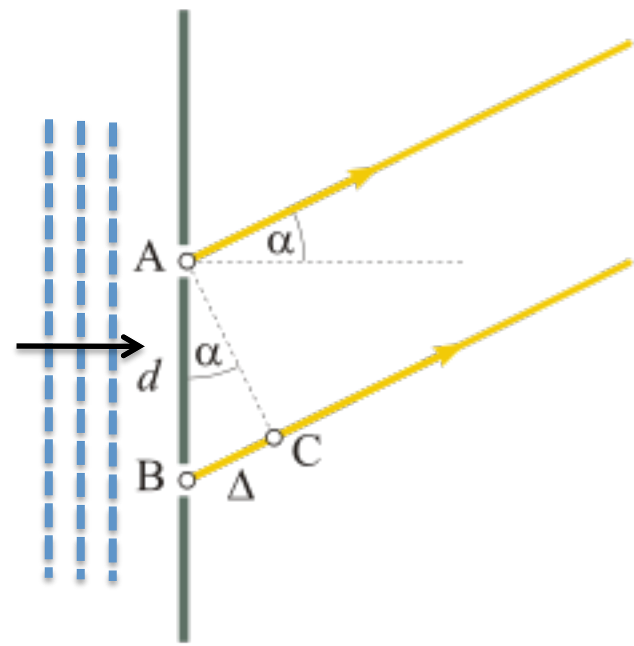
$$\frac{kd\sin\alpha}{2}=n\pi\rightarrow d\sin\alpha=n\frac{2\pi}{k}=n\lambda$$

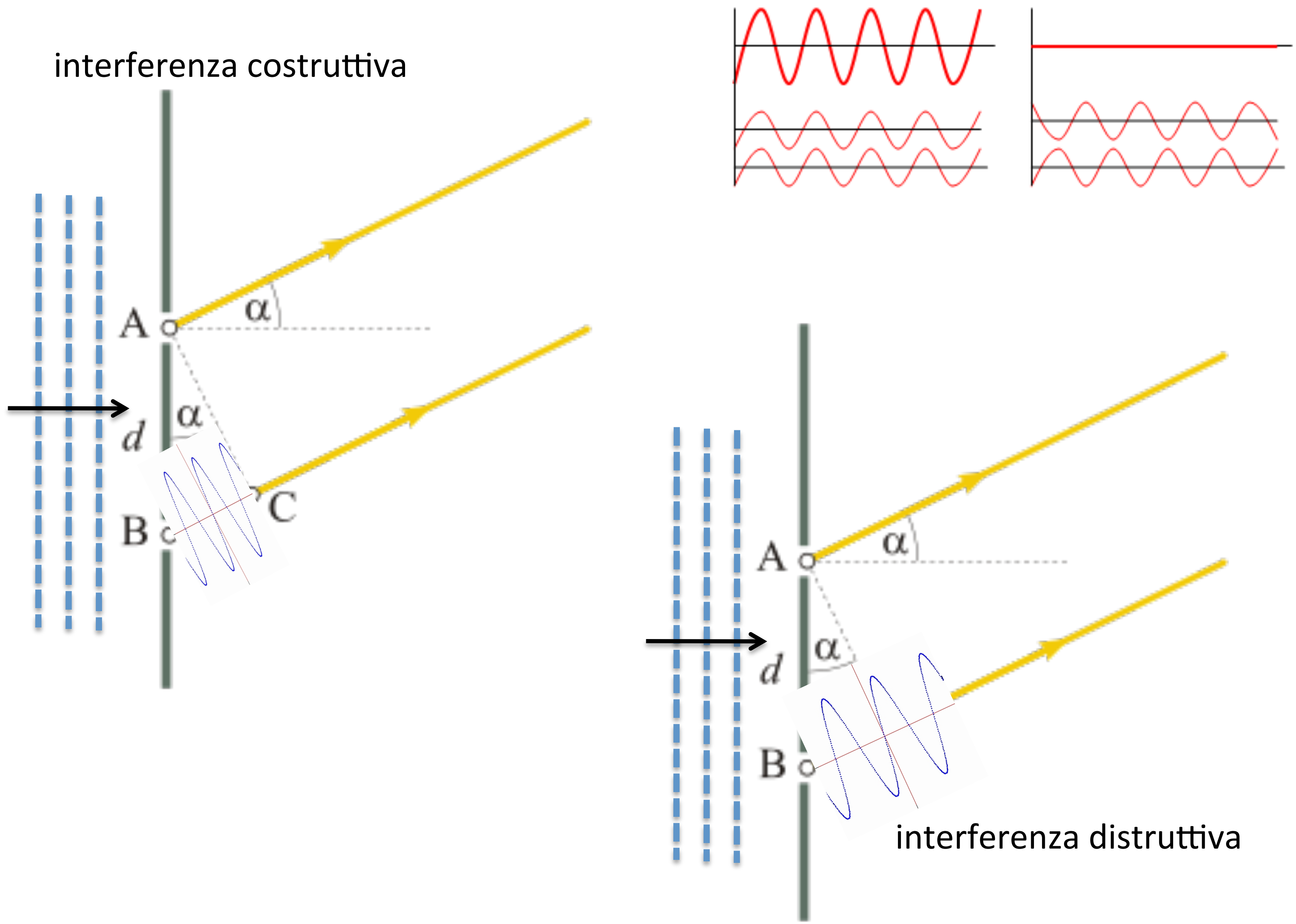
  - ovvero quando il tratto BC è pari ad un numero intero di lunghezze d'onda (le onde emesse da A e B tornano in fase)

- I minimi si avranno per

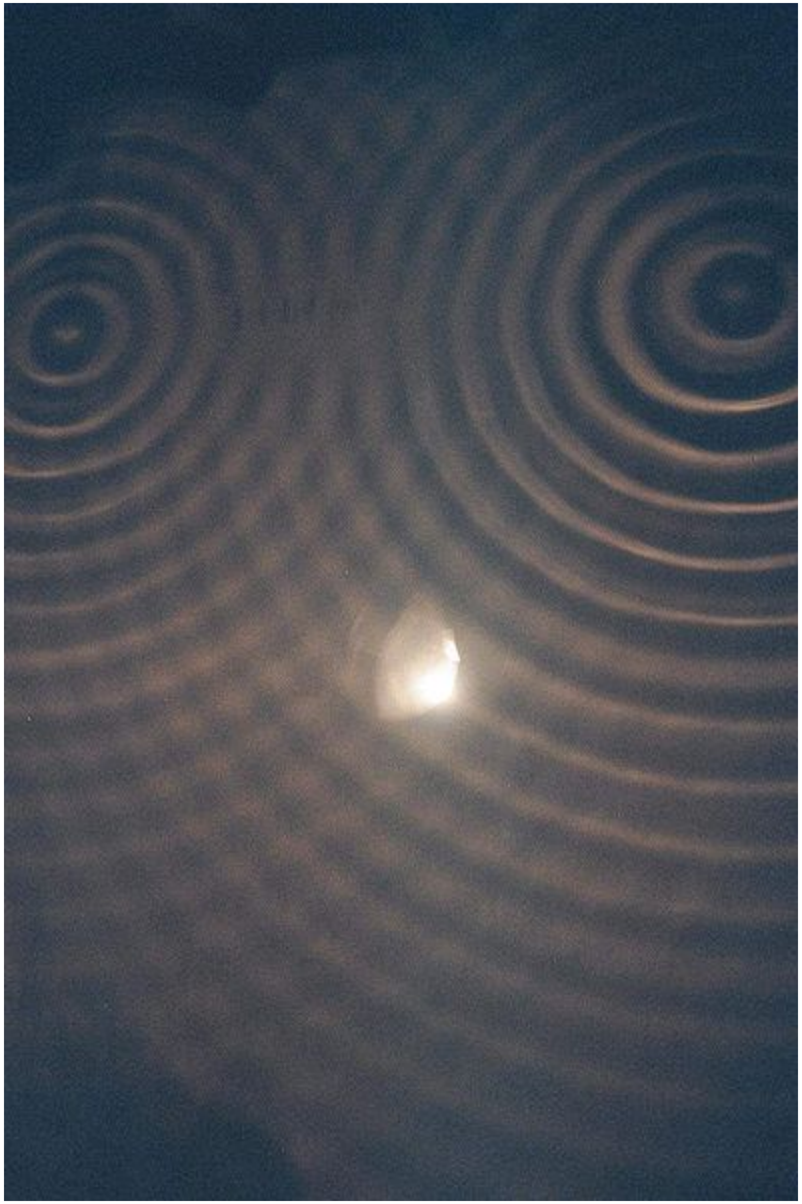
$$d\sin\alpha=(2n+1)\frac{\lambda}{2}\qquad(n=0,\pm1,\pm2.....)$$

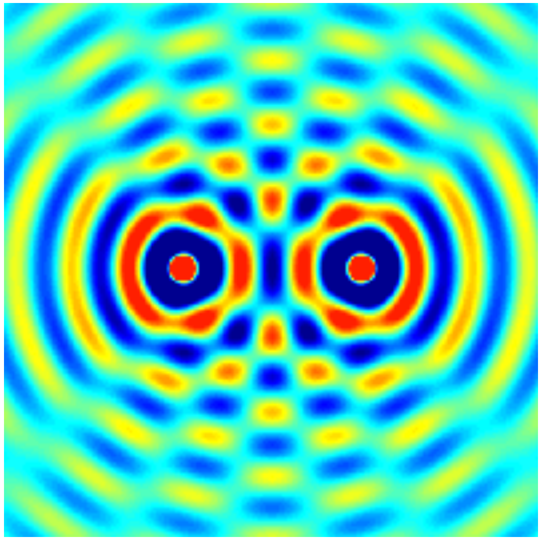
  - quando le onde si sommano sfasate di un semiperiodo





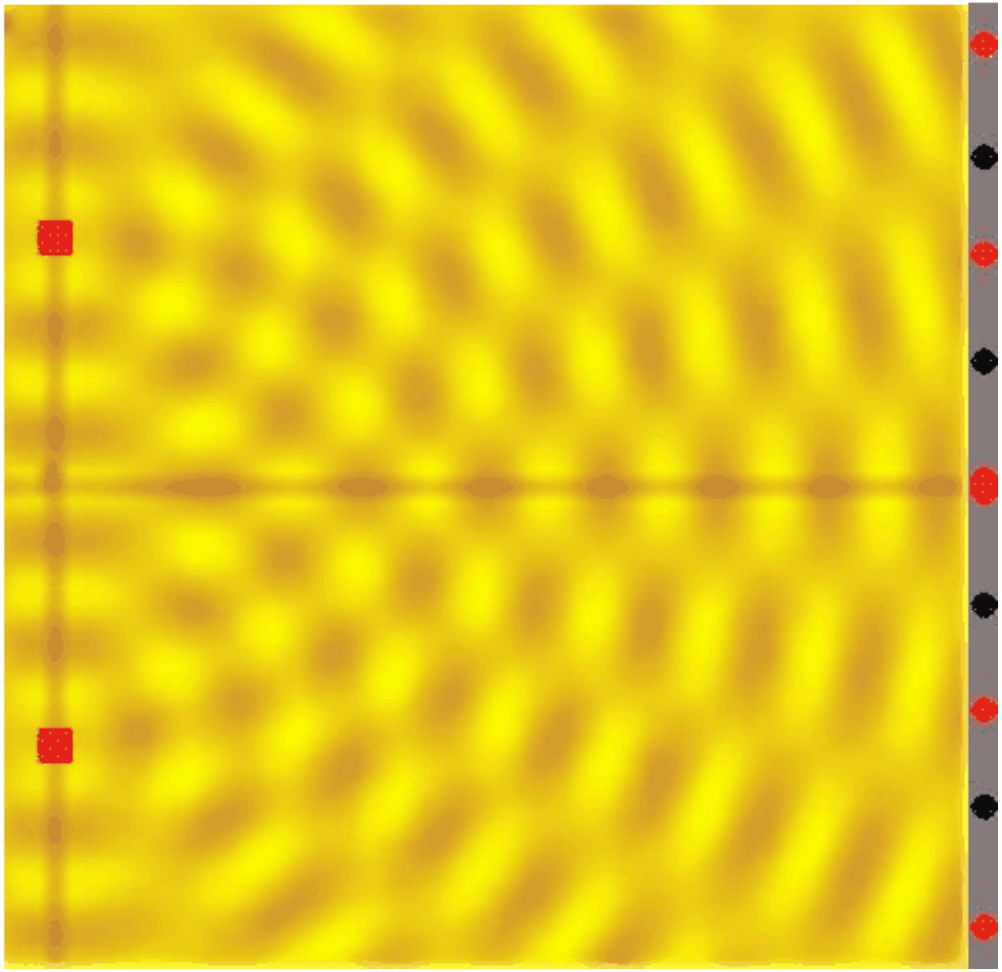
interferenza costruttiva
A
α
α
d
C
B
A
α
α
d
B
interferenza distruttiva





- Interferenza sulla superficie dell'acqua di onde provenienti da due sorgenti puntiformi (in fase)

- Si ha sempre interferenza?
  - Solo se le sorgenti mantengono la fase relativa
  - Se la fase varia nel tempo (come avviene per sorgenti indipendenti, per ex due lampadine) le frange di interferenza si spostano continuamente e si ottiene una valore medio



Onde stazionarie

- Equazione delle onde (in una dimensione)

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

$\psi = \vec{E}, \vec{B},$ ampiezza delle oscillazioni di una fune etc..

- soluzione:

$$\psi(x,t) = af(x \pm vt) + bg(x \pm vt)$$

  – una combinazione lineare di soluzioni è soluzione

- soluzione particolare: onda piana armonica

$$\psi(x,t) = Asen(kx \pm \omega t)$$

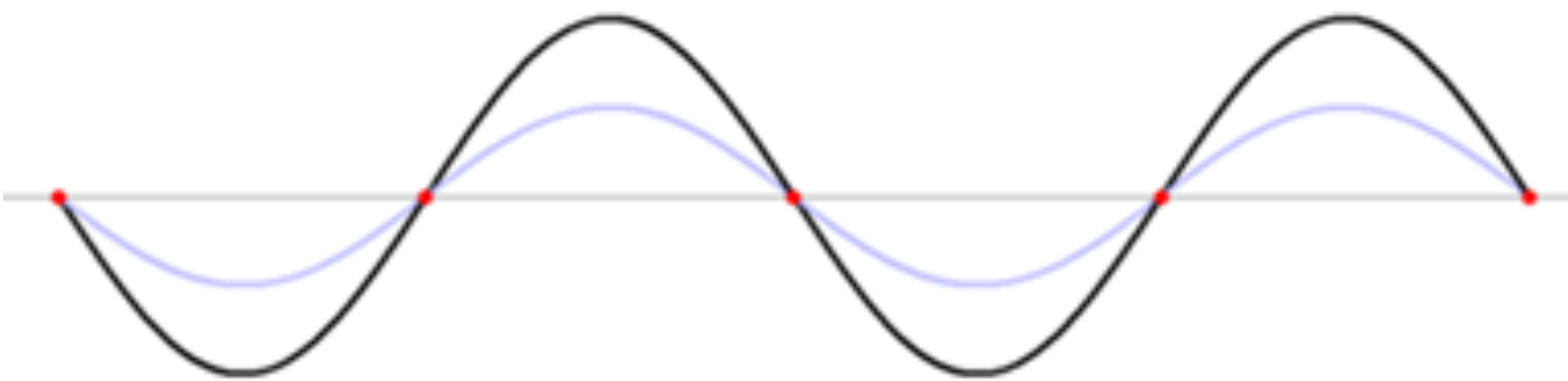
- una combinazione particolare di onde piane

$$\psi(x,t) = A\left[\sin(kx+\omega t) + \sin(kx-\omega t)\right] = 2A\sin(kx)\sin(\omega t)$$

  – non è più un'onda che progredisce, ma un **onda stazionaria**, ovvero un'oscillazione armonica com pulsazione ω la cui ampiezza dipende dalla coordinata x

onda stazionaria

- NB la figura blu è l’onda con velocità positiva, quella blu l’onda con velocità negativa e la nera è la somma

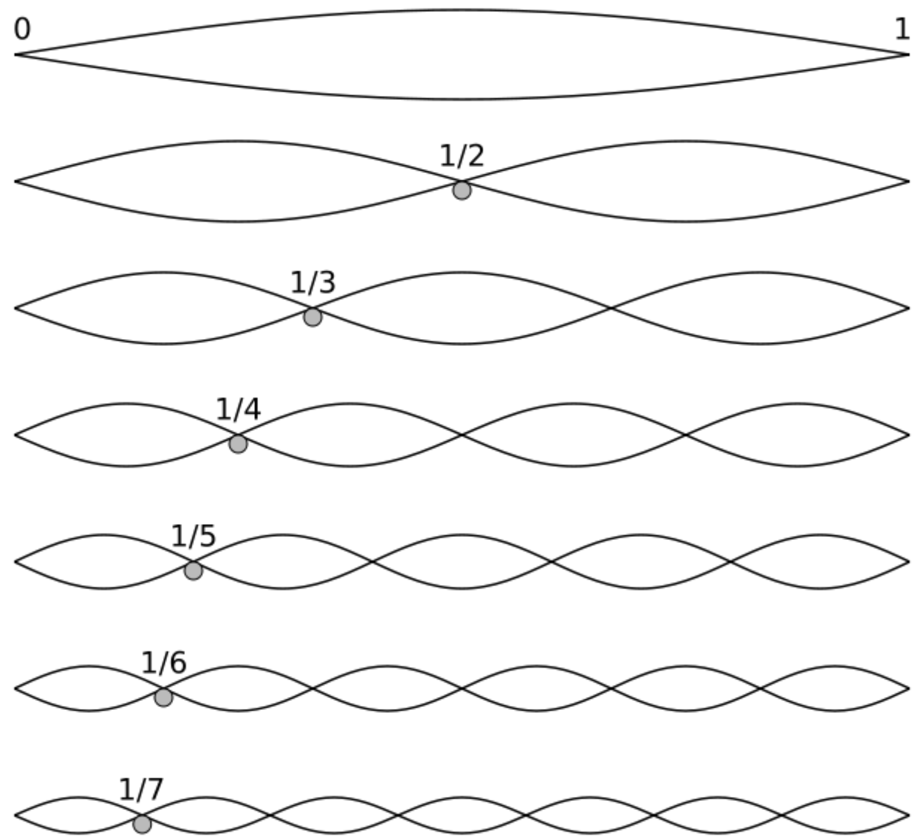


onde stazionarie

- tipico esempio: oscillazioni di una corda di lunghezza L fissata agli estremi
  - corda di chitarra, pianoforte etc.
- I due estremi devono essere un punto fisso (nodo)
  - ciò è vero se:

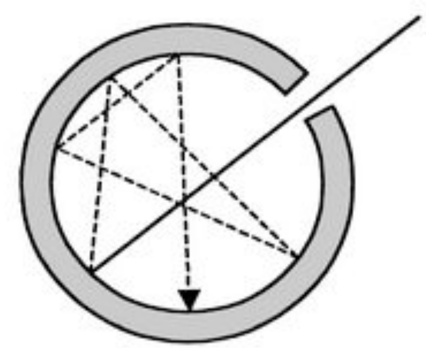
$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \qquad n = 1,2,3.....$$

$$\lambda = \frac{2L}{n} \qquad n = 1,2,3.....$$



onde stazionarie EM

- Interessante valutare le onde stazionarie elettromagnetiche in una cavità conduttrice
  - ovviamente, il campo deve essere nullo agli estremi (sul conduttore)
  - problema analogo a quello di corde fissate agli estremi
- In una cavità in un conduttore si formeranno delle onde EM stazionarie emesse dai dipoli oscillanti degli atomi delle pareti
  - La distribuzione delle onde dipenderà dall'energia delle oscillazioni termiche, quindi dalla temperatura delle pareti
  - facendo un piccolo foro verso l'esterno, la cavità emetterà una radiazione distribuita come quella interna
    - poiché la luce che entra dal piccolo foro viene assorbita dalla cavità (entra e rimbalza senza riuscire ad uscire) il foro si comporta come in "corpo nero"
    - corpo nero = sorgente che assorbe tutta la luce incidente e che emette in funzione della sua temperatura
- Utile calcolare la distribuzione di onde stazionarie in una cavità, per descrivere la radiazione del corpo nero
- Cosa serve
  - calcolare la distribuzione di onde stazionarie in una cavità
    - prima unidimensionale, poi tridimensionale
  - calcolare l'energia associata alle onde stazionarie



conto le onde stazionarie in un cavità

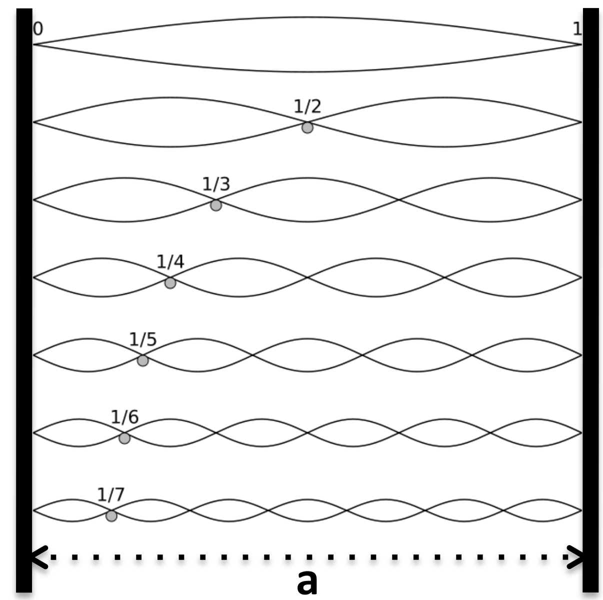
- quali sono le frequenze stazionarie possibili in una cavità unidimensionale di larghezza *a* ?

$$\lambda\nu = c$$

$$\lambda = \frac{2a}{n} \qquad\qquad n = 1,2,3.....$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a}n \;\;\rightarrow\;\; n = \frac{2a}{c}\upsilon \qquad n = 1,2,3.....$$

- quante frequenze stazionarie ci sono tra 0 e una data frequenza ν?

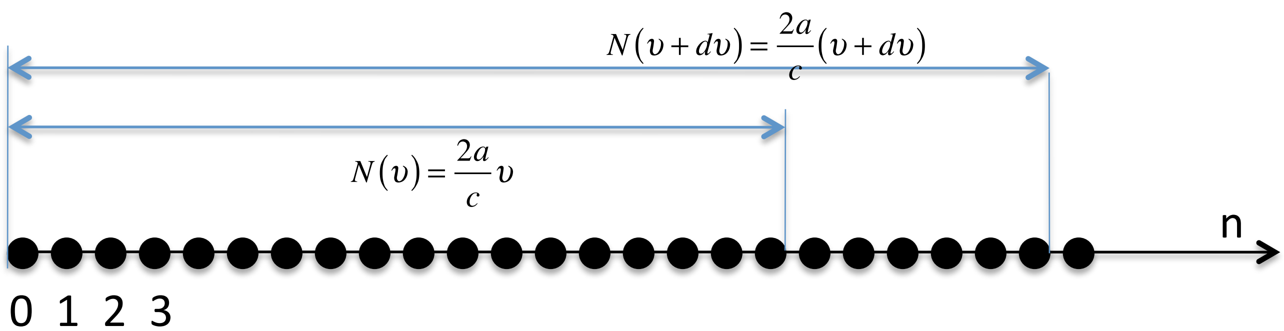


$n = \mathrm{int}\left[\frac{2a}{c}\upsilon\right]$ è il "numero armonico" della frequenza stazionaria più vicina a υ ($\leq\upsilon$)

tutte n le frequenze con numero armonico $\leq$ n sono oscillazioni stazionarie con frequenza $\leq\ \upsilon$

$$N(\upsilon) = \mathrm{int}\left[\frac{2a}{c}\upsilon\right]$$

onde EM stazionarie in una cavità conduttrice



- calcolo il numero di frequenze stazionarie disponibili tra ν e ν+dν

$$dN = N(\upsilon + d\upsilon) - N(\upsilon) = \frac{2a}{c} d\upsilon$$

- il numero è costante per ogni intervallo di frequenza, se la cavità è unidimensionale
- in realtà il numero va raddoppiato per le onde EM , poiché ci sono due polarizzazioni indipendenti (il campo E può essere diretto lungo x o lungo y se la propagazione è lungo z

$$dN = \frac{4a}{c} d\upsilon$$

- cosa succede se la cavità è tridimensionale?

onde stazionarie tridimensionali

- Usiamo onde piane tridimensionali

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t)$$
$$k = \left(k_x, k_y, k_z\right)$$

- Consideriamo una cavità cubica di lato a. L'onda deve soddisfare le "condizioni al contorno" (nodo sulla superficie) indipendentemente nelle 3 dimensioni

$$k_x = \frac{\pi n_x}{a}, k_y = \frac{\pi n_y}{a}, k_z = \frac{\pi n_z}{a} \qquad n_x, n_y, n_z = 1,2,3.....$$
$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

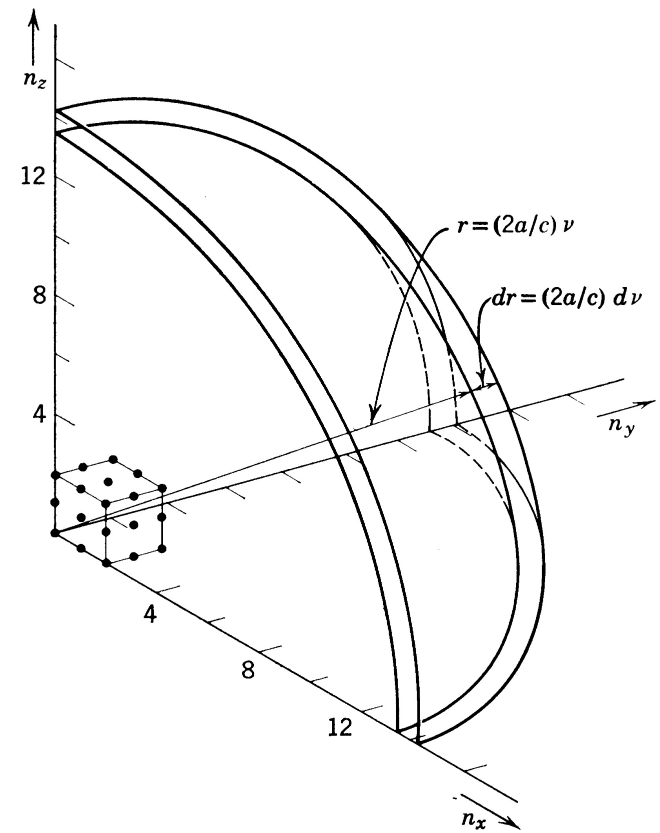
- è analogo al caso unidimensionale

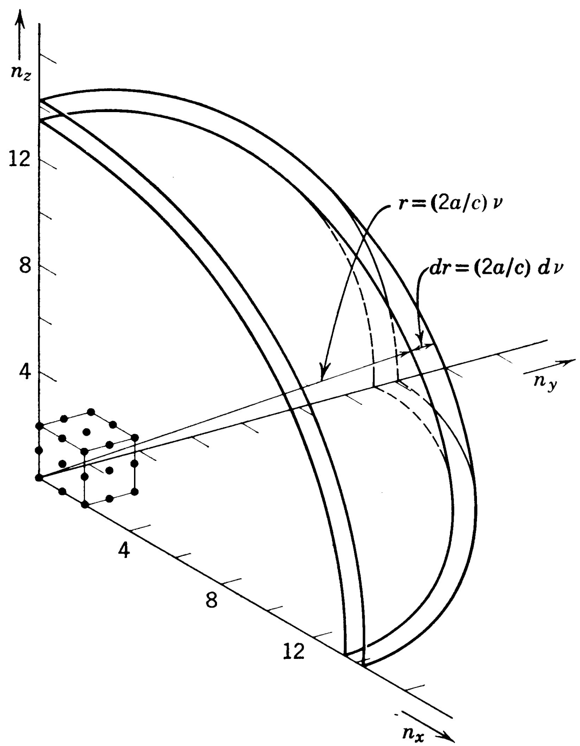
$$\nu = \frac{c}{2a} n$$ unidim.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$ tridim.

si può pensare a $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ come al raggio di una sfera in 3 dimensioni

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2a}{c}\upsilon$$





Il numero di onde stazionarie con frequenze minori od uguali ad una certa frequenza υ sarà proporzionale al volume della sfera con raggio r, quindi a r^3

$$r^3 \propto \upsilon^3 \rightarrow N(\upsilon) \propto \upsilon^3$$

Il numero di frequenze in un intervallo dυ attorno a υ sarà proporzionale al volume di una calotta sferica di raggio $r = \frac{2a}{c}\upsilon$ e spessore $dr = \frac{2a}{c}d\upsilon$ e quindi

$$dN(\upsilon) \propto \upsilon^2 d\upsilon$$

la densità di onde stazionarie possibili in una cavità a 3 dimensioni cresce con il quadrato della frequenza

formula di Rayleigh-Jeans

- Facendo i conti esatti e tenendo conto del fattore 2 dovuto alla polarizzazione si ha:

$$dN(\upsilon) = \frac{8\pi a^3}{c^3}\upsilon^2 d\upsilon$$

- Nella teoria classica, l'energia di un onda può avere un qualunque valore (dipende dall'ampiezza al quadrato). Ma in equilibrio termodinamico ci si aspetta che l'energia media sia proporzionale a kT

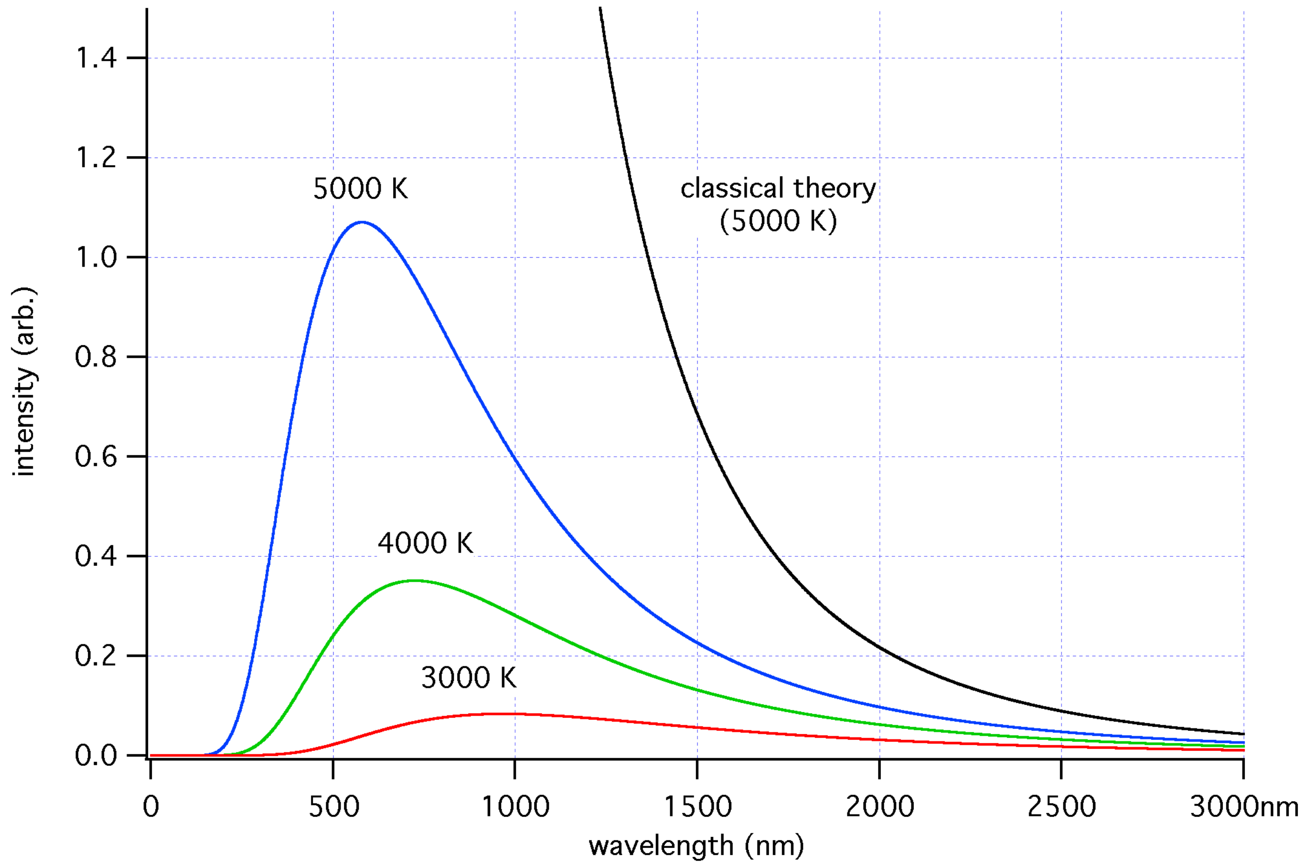
$$\bar{U} = kT$$

- Moltiplicando l'energia media per il numero di onde che ci sono in un intervallo di frequenza, e dividendo per il volume a^3 si ottiene la densità di energia per intervallo di frequenza, ad una data temperatura T della cavità

$$u_T(\upsilon)d\upsilon = \frac{8\pi kT}{c^3}\upsilon^2 d\upsilon$$

- La predizione (Rayleigh-Jeans) è completamente sbagliata e diverge a grandi frequenze (catastrofe ultravioletta). Serve una nuova teoria

- Quantizzazione dell'energia!



- la teoria classica prevede una distribuzione di intensità emessa che diverge a basse lunghezze d'onda (alte frequenze) mentre nella realtà la distribuzione ha un picco (che dipende dalla temperatura) e poi si azzera rapidamente ad alte frequenze

- Il fatto che al crescere della T (e quindi dell'energia degli atomi della cavità) il picco si sposti a frequenze più alte indica che deve esserci una relazione tra energia e frequenza

Soluzione di Plank

- La luce non è emessa in onde continue ma in pacchetti (fotoni), la cui energia è proporzionale alla frequenza

$$E = h\upsilon$$

$$h = 6.63 \times 10^{-34}\ \text{joule} \cdot \text{s}$$

- in questo modo le onde stazionarie ad alta frequenza (energia) sono emesse nella cavità con bassa probabilità in quanto non c'è sufficiente energia disponibile (e non sono quindi equiprobabili come nel caso classico). Questo taglia la distribuzione delle energie ad alta frequenza
- Calcolando opportunamente l'energia media non si ottiene più kT ma

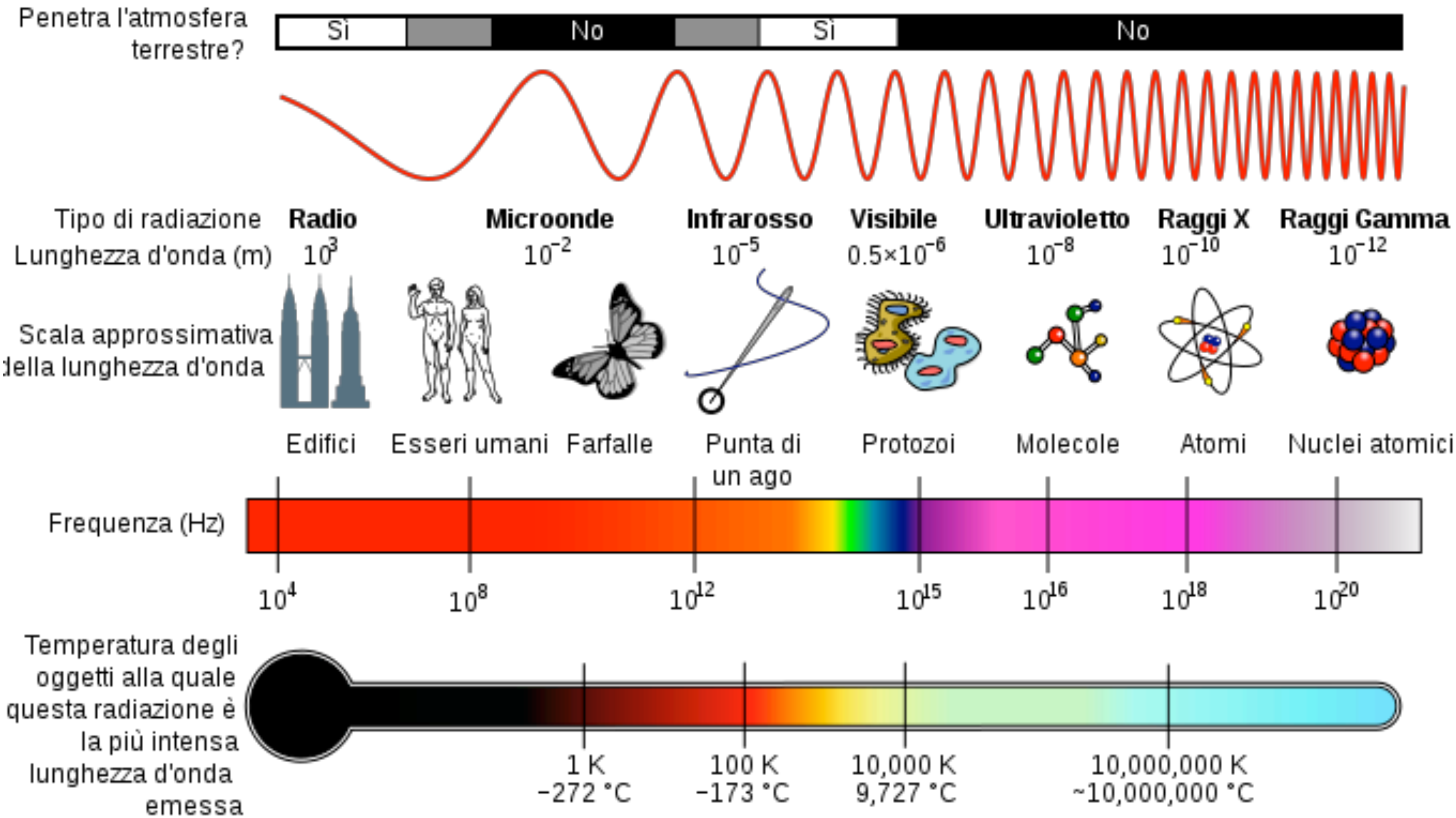
$$\bar{U}(\nu) = \frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}$$

- E la distribuzione di densità di energia diventa

$$\bar{u}_T(\nu)d\upsilon = \frac{8\pi\upsilon^2}{c^3}\frac{h\upsilon}{e^{\frac{h\upsilon}{kT}} - 1}d\upsilon$$

- che corrisponde allo spettro misurato dell'emissione del corpo nero

Spettro EM e corpo nero



esempio

- Una lampada a vapori di sodio da 100W ha un'efficienza del 15% ed emette luce con una lunghezza d'onda di 580nm (quasi monocromatica) Quanti fotoni al secondo emette?

$$\text{Potenza luminosa emessa P} = 100 \cdot 0.15 = 15W$$

$$\text{frequenza della luce } \upsilon = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{580 \cdot 10^{-9}} = 5.2 \cdot 10^{14}\, Hz$$

$$\text{energia del singolo fotone } h\upsilon = 5.2 \cdot 10^{14} \times 6.63 \cdot 10^{-34} = 3.4 \cdot 10^{-19}\, J$$

$$\text{numero di fotoni emessi al secondo } n = \frac{P}{h\upsilon} = \frac{15}{3.4 \cdot 10^{-19}} = 4.4 \cdot 10^{19}$$

- il numero di fotoni emessi è grandissimo. Se andiamo a misurare il campo elettrico medio otteniamo quanto previsto dalla teoria classica. Ovvero l'intensità media è ancora proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico
- l'energia del singolo fotone è dell'ordine di 2eV (1eV=1.6×10^{-19}J)
  - l'eV è un'unità di misura adatta a descrivere l'energia dei fotoni di luce visibile

Spettro di corpo nero

- Caratteristiche dello spettro di corpo nero
  - calcolando l'area sotto l'integrale si ottiene il potere emissivo I (intensità totale emessa ovvero energia per unità di superficie del C.N. per secondo)
  - si ha (legge di Stefan)

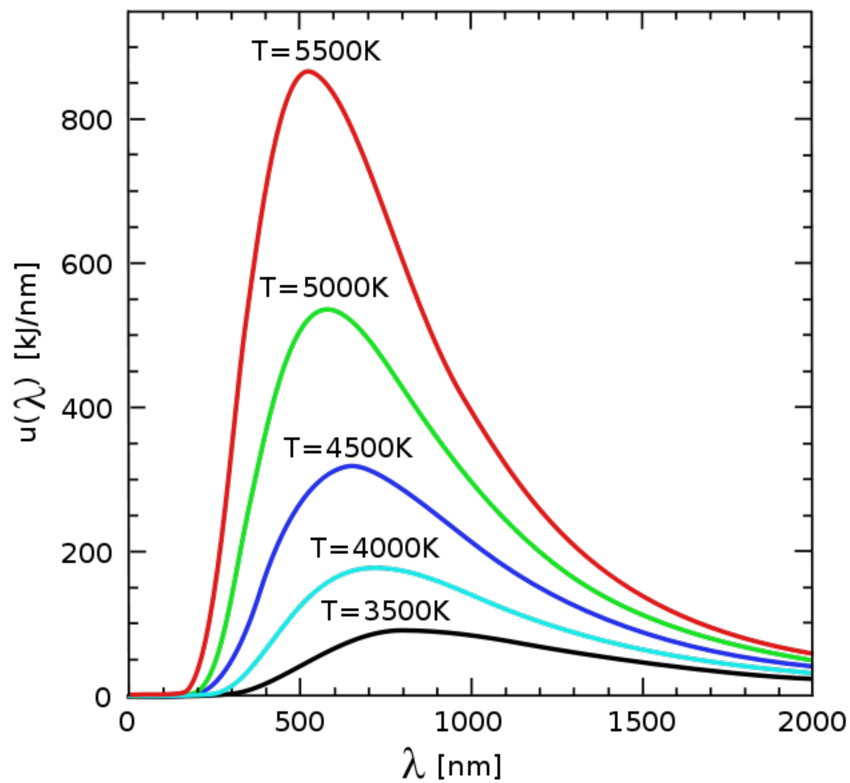
$$I = \sigma T^4$$
$$\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8}\, W/m^2K^4$$

  - La λ di picco è inversamente proporzionale alla T (legge di Wien)

$$\lambda_{MAX} T = b$$
$$b = 2.9 \cdot 10^{-3}\, K \cdot m$$

  - L'intensità per unità di lunghezza d'onda emessa al picco cresce con la quinta potenza della temperatura (II legge di Wien)

$$\varepsilon_{MAX} d\lambda = aT^5 d\lambda$$
$$a = 1.3 \cdot 10^{-5}\, W/m^3K^5$$



esempio

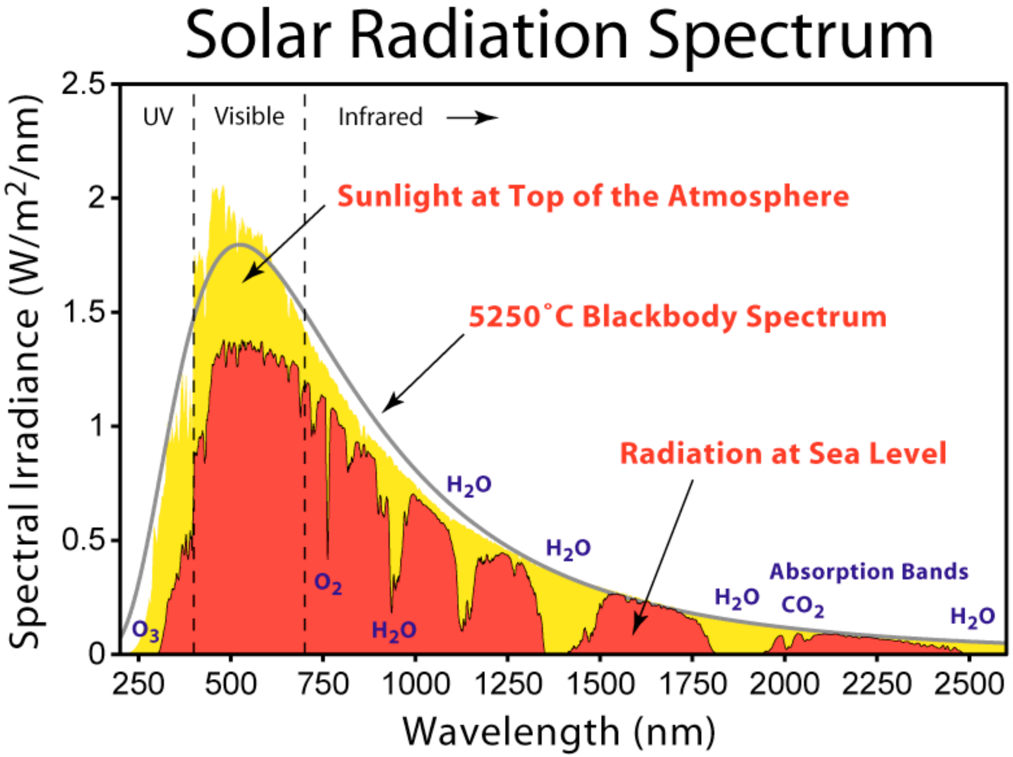
- Una sferetta metallica di 5mm di raggio è riscaldata a 5500K. Supponendo che emetta come un corpo nero calcolare:
  - la frequenza del picco di emissione
  - la potenza emessa dalla superficie
  - la potenza emessa dalla superficie in un intervallo di 10nm di lunghezza d'onda attorno al picco

$$\lambda_{MAX} = \frac{b}{T} = \frac{2.9 \cdot 10^{-3}}{5500} = 5.3 \cdot 10^{-7} m = 530 nm$$

$$P = I \cdot \Sigma = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2 = 5.7 \cdot 10^{-8} \cdot 5500^4 \cdot 4\pi \cdot 0.005^2 = 16.4 kW$$

$$P_{\lambda_{MAX}} = aT^5 \cdot \Delta\lambda \cdot 4\pi r^2 = 200W$$

  - (si è considerata la potenza costante attorno al picco)



- Lo spettro della luce solare è molto vicino a quello di un corpo nero a ~5500K
  - L'assorbimento nell'atmosfera genera distorsioni, in particolare nella regione infrarossa

- Una lampadina ad incandescenza (Tungsteno) ha uno spettro tipo corpo nero a circa 3000K
- Altre sorgenti hanno spettri molto diversi da quelli del corpo nero
  - non emettono per radiazione termica ma per altri fenomeni (laser, fluorescenza, emissioni atomiche in un gas eccitato…)

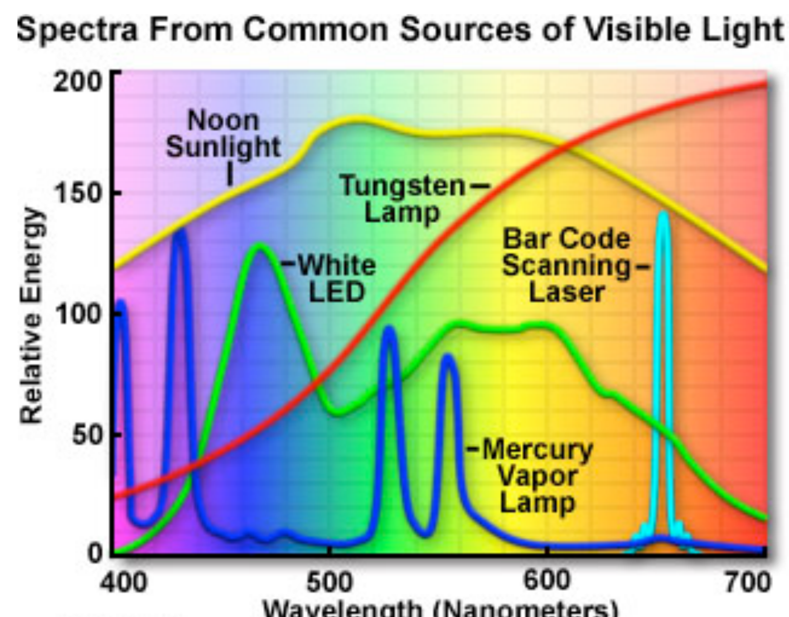
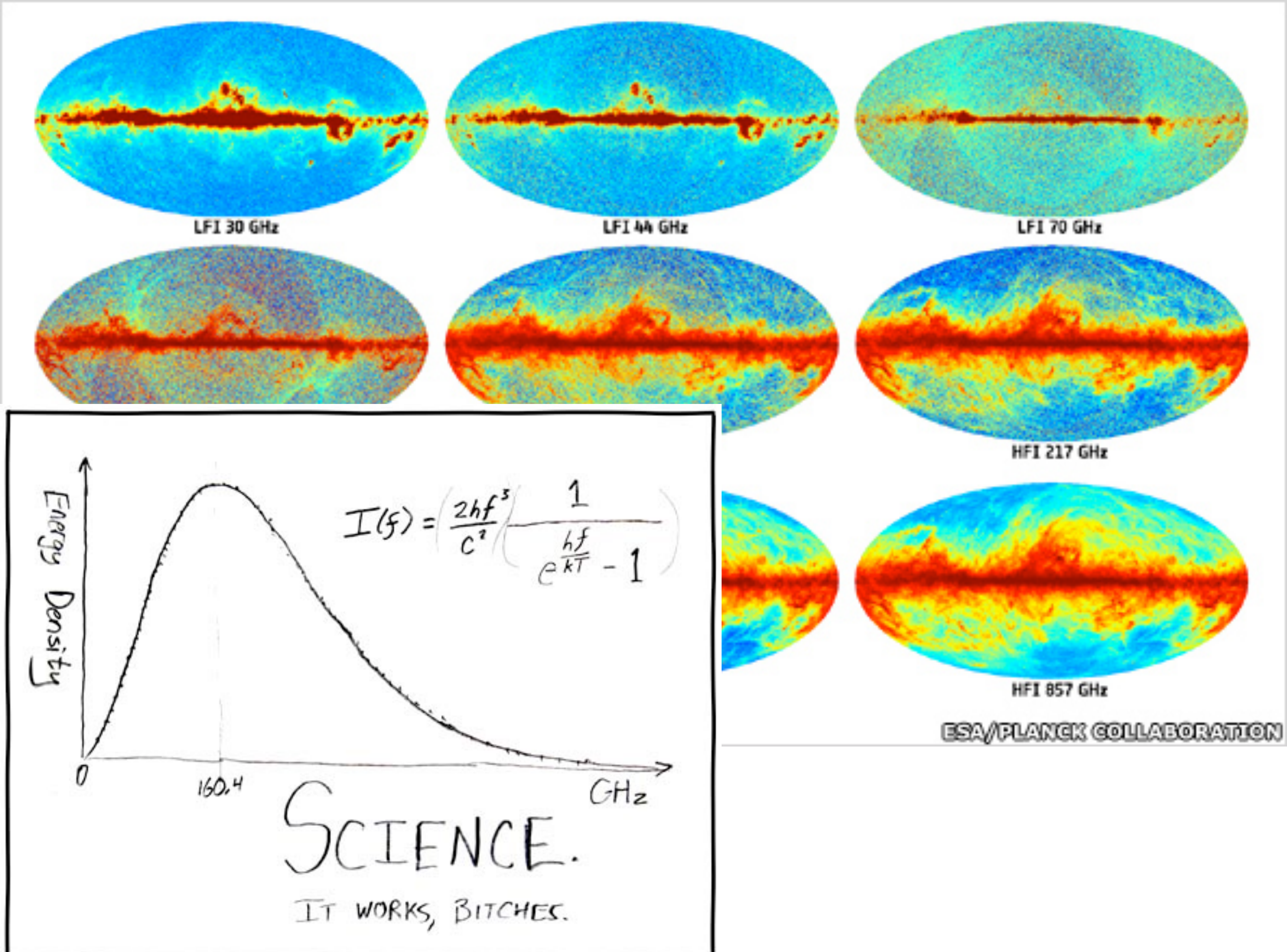


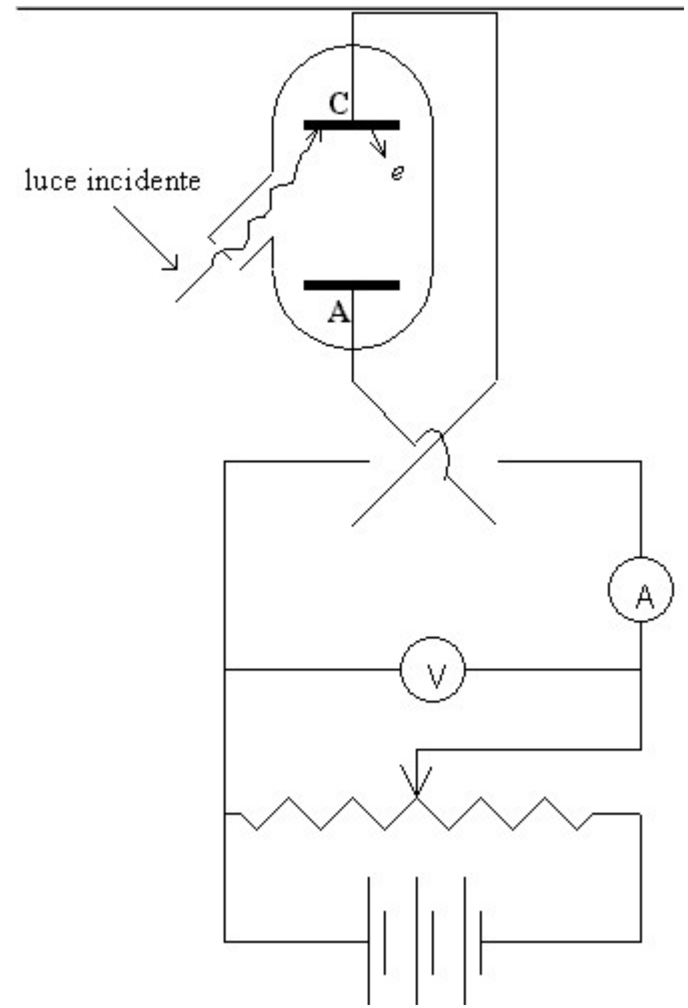
Figure 3



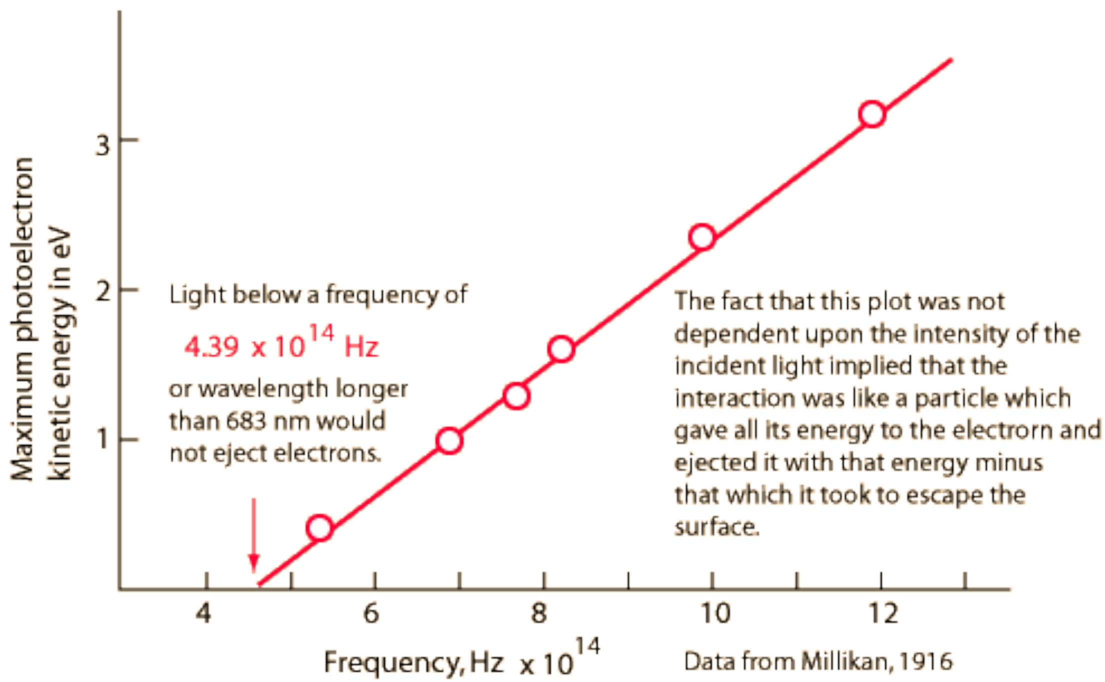
LFI 30 GHz
LFI 44 GHz
LFI 70 GHz
HFI 217 GHz
HFI 857 GHz
ESA/PLANCK COLLABORATION
Energy Density
$I(f) = \left(\frac{2hf^3}{c^2}\right)\left(\frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}\right)$
0
160.4
GHz
SCIENCE.
IT WORKS, BITCHES.

effetto fotoelettrico

- Apparato di Lenard (1900)
  - facendo incidere della luce su una superficie metallica, si estraggono degli elettroni
  - Impostando una tensione tra il catodo C e l'anodo A (C negativo rispetto ad A) si possono raccogliere tutti gli elettroni e misurare l'intensità della corrente prodotta
  - invertendo la tensione tra A e C si può misurare l'energia cinetica massima con cui vengono emessi gli elettroni
    - il valore di tensione inversa V_0 che annulla la corrente, è tale che l'energia cinetica degli elettroni viene spesa tutta per superare la differenza di potenziale. L'energia cinetica è quindi pari a qV_0 (V_0 se espressa in eV)

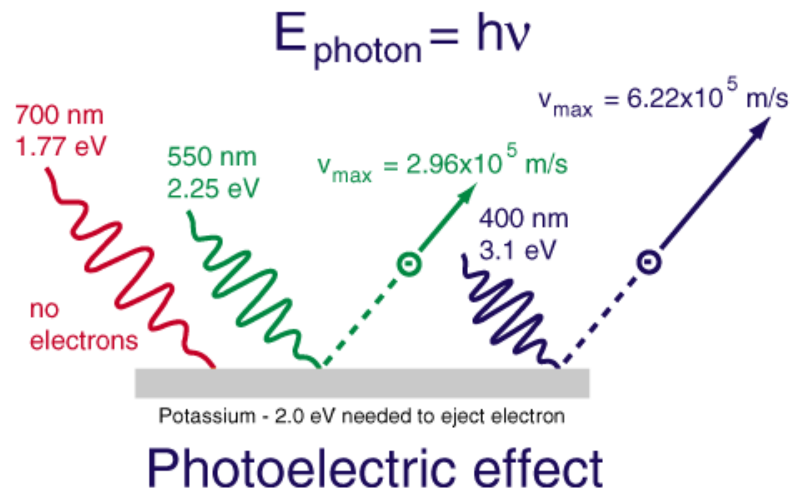


- Risultati di Lenard (con luce monocromatica)
  - La corrente inizia immediatamente all'accensione della luce, per quanto debole
    - non serve accumulare energia
  - La corrente (flusso di elettroni emesso) è direttamente proporzionale all'intensità della luce, mentre l'energia cinetica degli elettroni non dipende dall'intensità
    - anche ad intensità bassissime vengono emessi elettroni con la stessa energia cinetica
  - L'energia cinetica dipende dal colore della luce. E' massima con luce UV e decresce andando verso il rosso (alte λ, basse ν), fino a diventare nulla
    - Con luce troppo rossa, non vengono emessi elettroni fotoelettrici anche ad intensità luminose molto alte



Spiegazione

- Il risultato è incompatibile con la teoria classica
  - Anche a lunghezze d'onda grandi, se l'intensità della luce è grande il campo elettrico dovrebbe essere sufficiente ad estrarre gli elettroni
- Einstein 1905 (premio Nobel 1921)
  - La luce è fatta di fotoni con energia E=hν
  - I fotoni singoli interagiscono con la materia, quindi rilasciano un'energia E=hν indipendentemente dall'intensità
    - L'energia cinetica degli elettroni estratti è E_K=hν-W dove W è l'energia di legame dell'elettrone nel solido (in eV), ovvero il lavoro minimo per liberarlo (Work Function)
  - A lunghezze d'onda grandi, hν è minore di W e l'energia del fotone è insufficiente a liberare l'elettrone, indipendentemente dall'intensità
  - La crescere dell'intensità (se la frequenza è sopra soglia) aumenta il numero di fotoni e quindi il numero di elettroni estratti



- La descrizione classica della luce (onde) non è sbagliata, è complementare
  - in generale, la luce si comporta come un'onda nella propagazione, ma come una particella di energia definita (fotone) nell'interazione con la materia

Esempio

- Una sorgente di luce UV di con λ=250nm, di intensità pari a 1mW/m^2 incide perpendicolarmente ad una superfice di 10cm^2 ricoperta di Cesio (work function=2.14eV).
  - Calcolare l'energia cinetica massima con cui vengono estratti gli elettroni
  - la corrente dovuta all'effetto fotoelettrico (supponendo che tutti i fotoni producano elettroni che vengono raccolti, che non è vero nella realtà)

$$E = h\upsilon = h\frac{c}{\lambda} = 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{250 \cdot 10^{-9}} = 7.95 \cdot 10^{-19} J$$

$$E = \frac{7.95 \cdot 10^{-19}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 4.96 eV$$ energia dei fotoni in eV

$$E_k = E - W = 4.96 - 2.14 = 2.82 eV$$ energia degli elettroni estratti

$$P = I \cdot \Sigma = 1 \cdot 10^{-3} \times 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-6} W$$ potenza incidente sulla superfice

$$N = \frac{P}{h\upsilon} = \frac{10^{-6}}{7.95 \cdot 10^{-19}} = 1.26 \cdot 10^{12}$$ fotoni, quindi elettroni al secondo

$$i = N \cdot e = 1.26 \cdot 10^{12} \times 1.6 \cdot 10^{-19} = 202 nA$$ corrente prodotta

giunzione p-n e celle fotovoltaiche

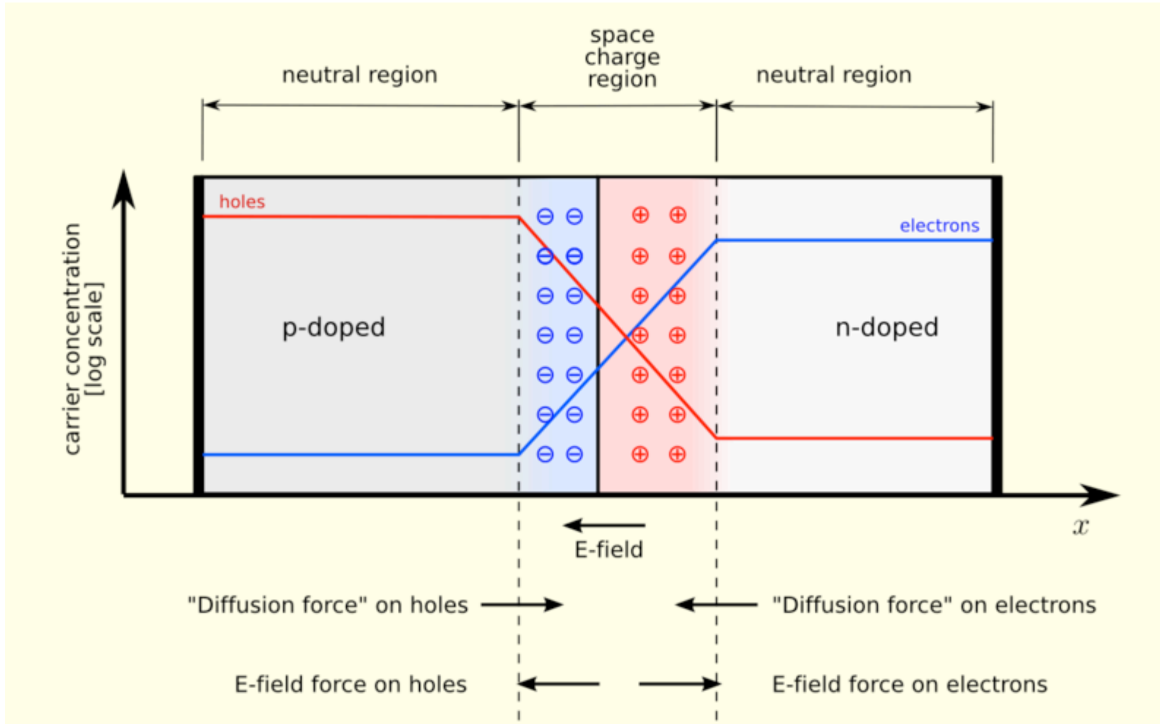
- Semiconduttori
  - cristalli con resistività tra 10^{-2} e 10^{9} $\Omega \cdot$ cm
  - intermedia tra conduttori (10^{-6} $\Omega \cdot$ cm) e isolanti ($10^{14} \div 10^{22}$ $\Omega \cdot$ cm)
  - Si, Ge, GaAs.

- Drogaggio nei semiconduttori
  - Alcuni atomi di valenza diversa vanno a sostituire gli atomi del cristallo
    - Si, GE hanno valenza 4 e formano legami a forma di tetraedro
  - Per ex B (valenza 3) o P (valenza 5)
    - Il fosforo ha 5 elettroni, 4 formano un legame con i Si vicini ed il quinto è disponibile per la conduzione. La resistività diminuisce, il silicio si dice drogato "n"
    - Il boro può estrarre un elettrone da un legame Si-Si per completare il legame. Si forma una lacuna positiva che si può muovere comportandosi come un portatore di carica positivo. Il silicio si dice drogato "p"
  - La conduttività cresce con la temperatura (al contrario che nei conduttori) in quanto aumenta la probabilità di formazione di elettroni liberi o di lacune
    - per esempio l'energia di ionizzazione per il P in un cristallo di Si è di 45 meV, confrontabile con l'energia termica a temperatura ambiente kT

$$kT = 1.38 \cdot 10^{-23} \times 300 = 4.14 \cdot 10^{-21} J = \frac{4.14 \cdot 10^{-21}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 26 meV$$

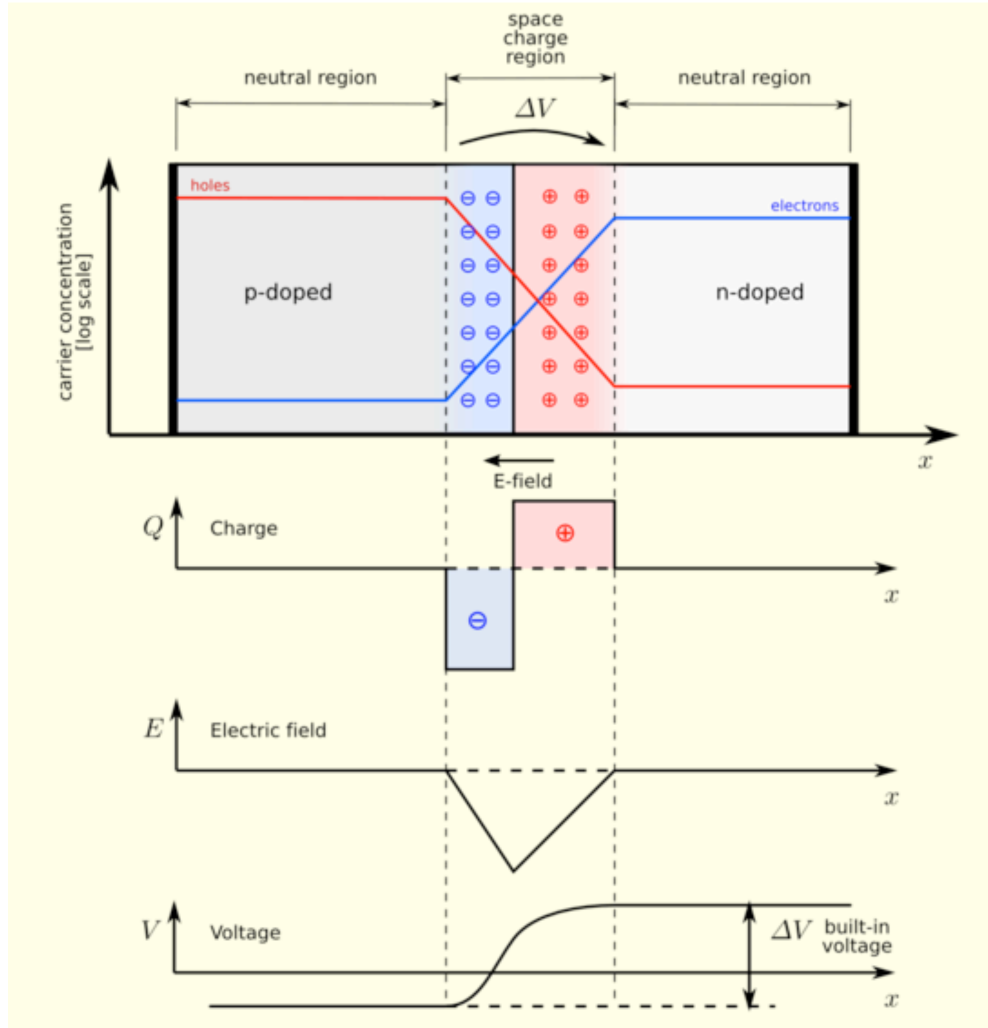
  - NB anche in presenza di impurità o drogaggio il semiconduttore è ancora neutro (come lo sono i conduttori). L'etichetta "p" o "n" si riferisce al tipo di portatori di carica disponibili

- Cosa succede in una giunzione tra un semiconduttore p e uno n (giunzione p-n)



- gli elettroni liberi della regione n tendono a derivare attraverso l'interfaccia nella regione p
- analogamente le lacune positive della regione p derivano verso la regione n
- la regione attorno all'interfaccia si carica, e la carica spaziale accumulata inibisce ulteriori trasporti di carica
  - In generale la regione interessata è piccola, dell'ordine del μm

- Nella zona di giunzione si forma un campo elettrostatico
  - lineare se la densità di carica è costante
  - si forma una differenza di potenziale elettrostatica intrinseca ΔV attraverso la giunzione



- NB se misuro la differenza di potenziale con un voltmetro ai capi del semiconduttore trovo comunque 0, perché ci sono effetti elettrochimici che bilanciano il potenziale elettrostatico
- altrimenti avrei un generatore infinito di FEM

diodo

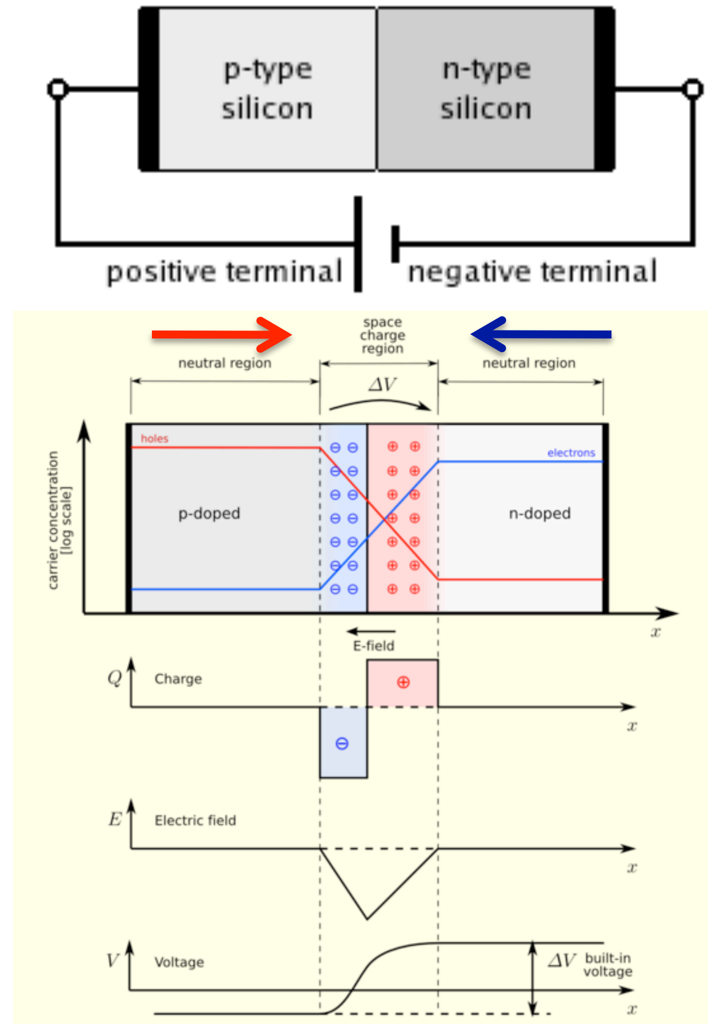
polarizzazione diretta

- Se applico una tensione diretta al diodo

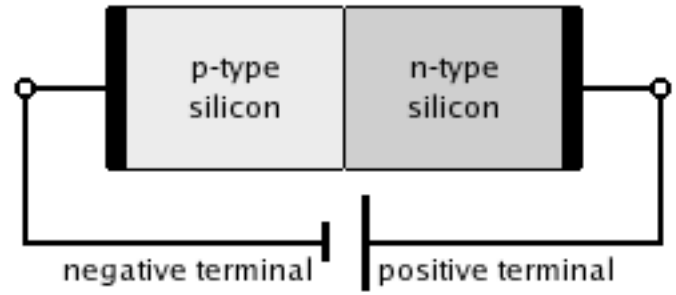
- terminale positivo connesso alla parte p

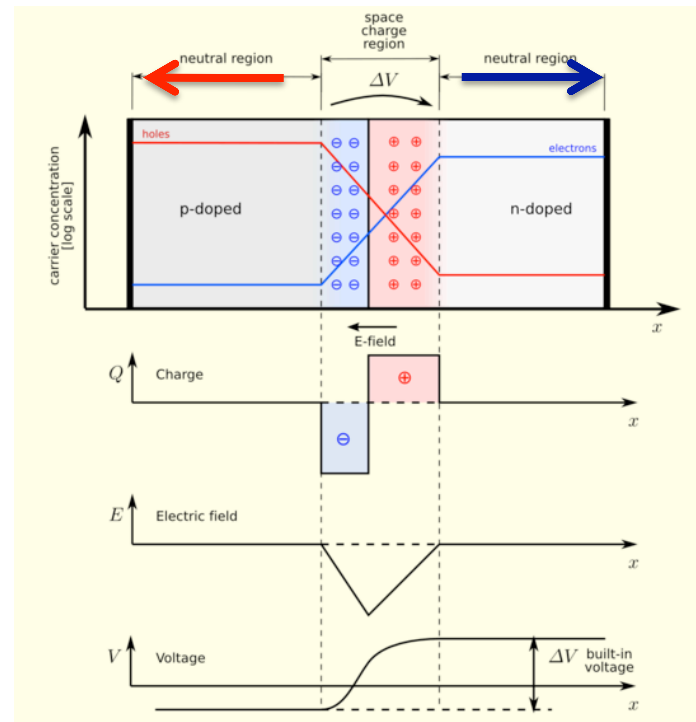
  - gli elettroni della parte n e le lacune nella parte p sono spinte verso la giunzione
  - il potenziale nella giunzione si riduce, e se la tensione è sufficiente (V_0=ΔV) si annulla permettendo il flusso delle cariche

  - il diodo conduce



polarizzazione inversa





- Se applico una tensione inversa al diodo
- terminale positivo connesso alla parte p
  - gli elettroni della parte n e le lacune nella parte p sono spinti verso i terminali
    - la zona carica attorno alla giunzione si allarga
  - il potenziale attraverso la giunzione aumenta opponendosi al flusso dei portatori
  - il diodo non conduce

celle fotovoltaiche

- Se una giunzione p-n è illuminata da luce di frequenza sufficiente a generare una coppia elettrone-lacuna
  - L'elettrone e la lacuna diffondono spinti dal potenziale elettrostatico
    - la lacuna verso la parte p e l'elettrone verso la parte n
  - si forma una tensione diretta nel diodo, che diventa un generatore di FEM
    - effetto fotovoltaico
  - la FEM generata può essere usata per produrre potenza in un circuito
- Generatori fotovoltaici ad energia solare
  - Intensità incidente ≈ $1 kW/m^2$
  - Rendimento 6%÷15% a seconda del tipo di silicio
  - Si raggiunge il 40% con celle a multi-giunzione sensibili a parti diverse dello spettro luminoso