1 *ELEMENTI DI ALGEBRA BOOLEANA*

1.1 I postulati dell'Algebra di Boole

I circuiti digitali, chiamati anche circuiti logici, trattano segnali di forma quantizzata (assenza o presenza del segnale) in contrapposizione ai circuiti analogici che trattano segnali di tipo continuo. I circuiti logici sono l'elemento fondamentale dei moderni sistemi di calcolo (calcolatori digitali programmabili) e derivano il loro attributo, logici, dal fatto che ad essi sono applicabili metodi di analisi e sintesi direttamente derivati dall'algebra booleana, formulata da George Boole (1815-1864), inizialmente concepita come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica: il lavoro originale era intitolato *"An Investigation of the Laws of Thought"* (1854).

È interessante notare che il lavoro di Boole non ebbe assolutamente successo come strumento per l'analisi o la modellizzazione del pensiero umano. Solo molto più tardi, dopo la fine della prima guerra mondiale, con lo sviluppo delle prime forme di elettronica digitale, l'algebra di Boole trovò la sua fortuna e vedremo presto perchè.

L'algebra di Boole è una teoria deduttiva che svilupperemo a partire da semplici postulati. Quindi deriveremo i teoremi fondamentali per la trattazione delle funzioni logiche (combinatorie e sequenziali) e i metodi di semplificazione delle funzioni stesse.

Anzitutto definiamo una classe *M* di elementi e due operatori "+" e "•" detti rispettivamente somma e prodotto. La scrittura del simbolo "•" sarà omessa, secondo le convenzioni usuali, ogniqualvolta ciò non generi ambiguità.

I postulati che seguono mettono in evidenza una sorta di simmetria o dualità rispetto ai due operatori:

P1: Dati 2 elementi A e B, in M, vale la proprietà commutativa sia per la somma che per il prodotto:

$$A + B = B + A \tag{P1a}$$
$$A \bullet B = B \bullet A \tag{P1b}$$

P2: Esiste in M un elemento, **0**, neutro rispetto alla somma ed un elemento, **1**, neutro rispetto al prodotto:

$$A + \mathbf{0} = A \tag{P2a}$$
$$A \bullet \mathbf{1} = A \tag{P2b}$$

P3: Dati 3 elementi A, B, C, in M, vale la proprietà distributiva sia rispetto alla somma che rispetto al prodotto:

$$A + BC = (A + B)(A + C) \tag{P3a}$$
$$A\,(B + C\,) = AB + AC \tag{P3b}$$

P4: Per ogni elemento A della classe M esiste un elemento $\overline{A}$, detto complemento o negazione di A, tale che:

$$A + \overline{A} = \mathbf{1} \tag{P4a}$$
$$A \bullet \overline{A} = \mathbf{0} \tag{P4b}$$

Per provare la non contraddittorietà dei postulati è sufficiente trovare una classe M, di elementi reali, nella quale gli stessi siano validi. In particolare ci interessa verificare che questa classe possa essere quella costituita delle interconnessioni A, B, C, etc., fra gli operatori circuitali digitali di *somma* (OR) e *prodotto* (AND) che andremo a definire. Provata la validità dei postulati per questi elementi, potremo applicare ad essi non solo i postulati stessi ma tutti i teoremi che ne deriveremo.

L'operatore circuitale di *prodotto* che introduciamo, è disegnato in fig. 1.1.1a e il suo funzionamento è descritto dalla tabella 1.1.1 se supponiamo che i segnali d'ingresso e d'uscita (gli stati delle connessioni) possano essere o tensione zero o la tensione positiva di alimentazione. Analogamente l'operatore circuitale di *somma* è definito dal circuito di fig. 1.1.1b, descritto nella tabella 1.1.2.

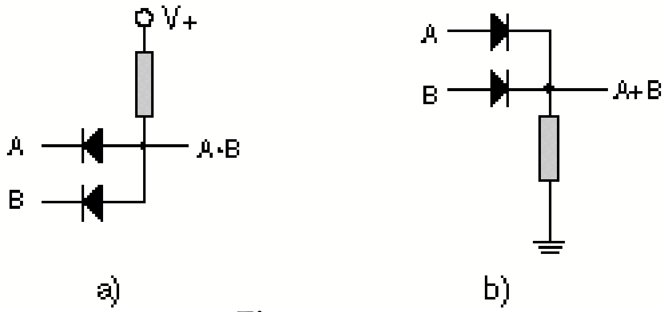

Figura 1.1.1

I due circuiti a diodi di fig.1.1.1 sono rappresentati rispettivamente dai simboli logici di fig. 1.1.2 comunemente usati per indicare le funzioni AND e OR. Possiamo dire per l'AND che c'è un segnale in uscita, V^+, solo se ***e*** l'uno ***e*** l'altro ingresso sono presenti.

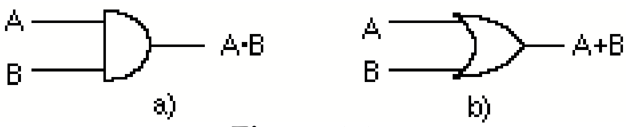

Figura 1.1.2

Tabella 1.1.1

A	*B*	*A•B*
0	0	0
V+	0	0
0	*V+*	0
V+	*V+*	*V+*

Tabella 1.1.2

A	*B*	*A+B*
0	0	0
V+	0	*V+*
0	*V+*	*V+*
V+	*V+*	*V+*

Possiamo dire per l'OR che c'è un segnale in uscita, V^+, se l'uno ***o*** l'altro degli ingressi sono presenti.

Il postulato P2 è verificato se interpretiamo lo **0** come lo stato della connessione con valore di tensione zero e l'**1** come lo stato con valore V^+.

La validità del postulato P3 nella formulazione:

$$A + BC = (A + B)(A + C)$$

consiste nel verificare l'uguale comportamento dei due circuiti di fig. 1.1.3. La verifica di ciò è immediata dalla tabella 1.1.3.

La formulazione:

$$A(B+C)=AB+AC$$

è certamente meno inusuale, ma volendo essere rigorosi si verifica dalla tabella 1.1.4.

Il postulato P4 è verificato se interpretiamo $\overline{A}$ come l'opposto della tensione di *A*, come si verifica dalla tabella 1.1.4, caso particolare delle tabelle 1.1.1 e 1.1.2, ovvero che valga **0** se *A* vale **1** e viceversa.

L'opposto di *A*, $\overline{A}$, verrà nel seguito chiamato anche *complemento* di *A* o *non-A*, e potrà anche essere scritto come /*A*.

È tuttavia importante chiarire subito che gli operatori che stiamo considerando valgono per la verifica dei postulati, perchè effettivamente realizzano le operazioni richieste, tuttavia non possono essere in pratica utilizzati come tali.

L'assunzione implicita che il diodo si comporti come un elemento ideale, con resistenza nulla se conduce e infinita se interdetto, è una grossolana semplificazione che trascura la caduta di tensione sulla giunzione polarizzata direttamente. In una rete logica a più stadi questa caduta ci porterebbe alla fine ad avere livelli logici che non sono più né 0*V* né *V*+. Nel paragrafo 2.4 si vedranno strutture circuitali realistiche.

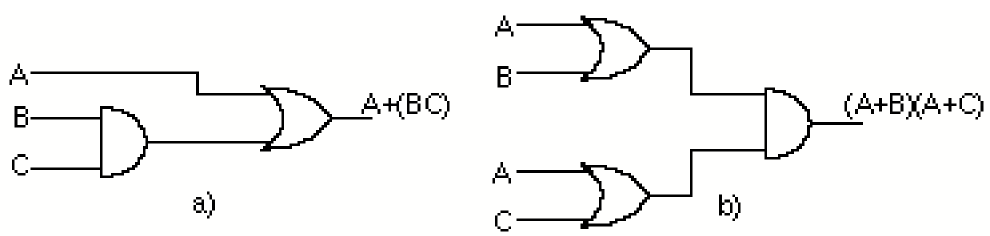

Figura 1.1.3

Da quanto esposto concludiamo che i postulati booleani sono consistenti coi circuiti di fig. 1.1.1, AND e OR, che trattino tensioni a due valori e quindi possiamo affermare che l'algebra di Boole è valida nella classe K costituita dalle interconnessioni fra i circuiti logici elementari ora introdotti. Potremo quindi utilizzare per essi i postulati stessi e tutti i teoremi che ne derivano.

Tuttavia si possono trovare altre classi per le quali i postulati sono validi. In particolare essi sono applicabili agli insiemi di punti.

Tabella 1.1.3

A	*B*	*C*	*A*+*BC*	(*A*+*B*)(*A*+*C*)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Tabella 1.1.4

A	*B*	*C*	*A*(*B*+*C*)	(*AB*+*AC*)
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Supponiamo che la classe *M* sia costituita dai sottoinsiemi di un insieme chiamato *M*. È facile verificare che tutti i postulati sono verificati se interpretiamo ($A + B$) come l'insieme *unione* dei punti di *A* e *B*, e ($A \bullet B$), come l'insieme *intersezione* di *A* con *B*. L'elemento $\overline{A}$

Tabella 1.1.5

A	$\overline{A}$	$A+\overline{A}$	$A\bullet\overline{A}$
0	1	1	0
1	0	1	0

Figura 1.1.4

sarà allora costituito da tutti i punti che non appartengono ad *A*, l'elemento **0** sarà l'insieme vuoto mentre l'elemento **1** sarà costituito da *M* stesso (fig. 1.1.4).

La fig. 1.1.5, ad esempio, mostra la validità della proprietà distributiva rispetto alla somma.

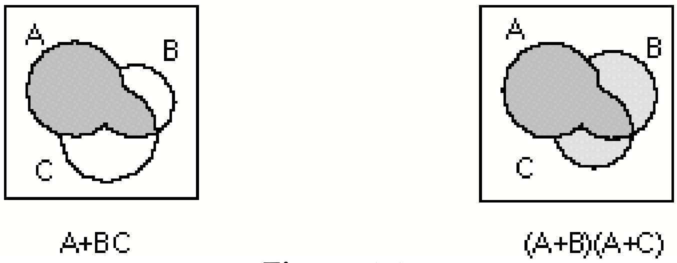

Figura 1.1.5

La rappresentazione di quantità booleane in forma grafica può essere utilizzata per la dimostrazione dei teoremi in modo efficace ed immediato.`

1.2 Alcuni teoremi

Dai postulati introdotti si possono derivare molti teoremi. Essi possono essere dimostrati sia in modo analitico, utilizzando i postulati stessi e teoremi già dimostrati, sia in modo grafico dimostrandone la validità per gli insiemi di punti come visto nel paragrafo precedente. Di seguito sono dati alcuni semplici teoremi e le relative dimostrazioni analitiche lasciando allo studente le dimostrazioni col metodo grafico. Per ogni passaggio è indicato a margine il postulato o il teorema utilizzato.

T1a: $A + A = A$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
A + A &= (A + A)\bullet\mathbf{1} && \text{(P2b)}\\
&= (A + A)(A + \overline{A}) && \text{(P4a)}\\
&= A + A\overline{A} && \text{(P3a)}\\
&= A + \mathbf{0} && \text{(P4b)}\\
&= A && \text{(P2a)}
\end{aligned}$$

T1b: $A \bullet A = A$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
A \bullet A &= AA + \mathbf{0} && \text{(P2a)}\\
&= AA + A\overline{A} && \text{(P4b)}\\
&= A(A + \overline{A}) && \text{(P3b)}\\
&= A \bullet 1 && \text{(P4a)}\\
&= A && \text{(P2b)}
\end{aligned}$$

T2a: $A + \mathbf{1} = \mathbf{1}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
A + \mathbf{1} &= (A + \mathbf{1}) \bullet \mathbf{1} && \text{(P2b)}\\
&= (A + \mathbf{1})(A + \overline{A}) && \text{(P4a)}\\
&= A + (\overline{A} \bullet \mathbf{1}) && \text{(P3a)}\\
&= A + \overline{A} && \text{(P2b)}\\
&= \mathbf{1} && \text{(P4a)}
\end{aligned}$$

T2b: $A \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
A \bullet \mathbf{0} &= (A \bullet \mathbf{0}) + \mathbf{0} && \text{(P2a)}\\
&= A\,\mathbf{0} + A\overline{A} && \text{(P4b)}\\
&= A(\overline{A} + \mathbf{0}) && \text{(P3b)}\\
&= A\overline{A} && \text{(P2a)}\\
&= \mathbf{0} && \text{(P4b)}
\end{aligned}$$

T3a: $A + AB = A$

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
A + AB &= (A \ \mathbf{1}) + (AB) && \text{(P2b)}\\
&= A\,(\mathbf{1} + B) && \text{(P3b)}\\
&= A \ \ \mathbf{1} && \text{(T2a)}\\
&= A && \text{(P2b)}
\end{aligned}
$$

T3b: $A\,(A + B) = A$

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
A\,(A + B) &= (A + \mathbf{0})(A + B) && \text{(P2a)}\\
&= A + B \ \ \mathbf{0} && \text{(P3a)}\\
&= A + \mathbf{0} && \text{(T2b)}\\
&= A && \text{(P2a)}
\end{aligned}
$$

1.3 I teoremi di De Morgan

Una coppia di teoremi, Tdm1 e Tdm2, detti di De Morgan, è di importanza fondamentale per la manipolazione delle espressioni booleane. Essi si enunciano come segue:

Tdm1: $\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$
Tdm2: $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

Per la dimostrazione di Tdm1 basterà provare che sono vere le due espressioni:

$(A + B) + \overline{A}\,\overline{B} = \mathbf{1}$
e
$(A + B) \bullet \overline{A}\,\overline{B} = \mathbf{0}$.

In tal caso, ricordando il postulato P4, avremo verificato che $(A+B)$ e $\overline{A}\,\overline{B}$ sono una il complemento dell'altra come enunciato da Tdm1.

Consideriamo la prima delle due ed applichiamo la proprietà distributiva rispetto alla somma (P3a), quindi il P4a e i teoremi T2a e T1b:

$(A + B) + \overline{A}\,\overline{B}$	$=$	$(A + B + \overline{A})(A + B + \overline{B})$	(P3a)
	$=$	$(B + \mathbf{1})\,(A + \mathbf{1})$	(P4a)
	$=$	$\mathbf{1} \bullet \mathbf{1}$	(T2a)
	$=$	$\mathbf{1}$	(T1b)

Alla seconda relazione applichiamo di nuovo P3b, P4b e quindi T2b e T1a:

$(A + B)\,\overline{A}\,\overline{B}$	$=$	$A\overline{A}\,\overline{B} + B\overline{A}\,\overline{B}$	(P3b)
	$=$	$\overline{B}\mathbf{0} + \overline{A}\mathbf{0}$	(P4b)
	$=$	$\mathbf{0} + \mathbf{0}$	(T2b)
	$=$	$\mathbf{0}$	(T1a)

Il Tdm2 si dimostra in modo analogo (duale) facendo vedere che risulta:

$(\overline{A} + \overline{B}) + AB = \mathbf{1}$
$(\overline{A} + \overline{B}) \bullet AB = \mathbf{0}$

Consideriamo la prima delle due e applichiamo la proprietà distributiva rispetto alla somma (P3a), quindi il P4a e i teoremi T2a e T1b:

$$(\overline{A} + \overline{B}) + AB = (A + \overline{B} + A)(\overline{A} + \overline{B} + B) \qquad \text{(P3a)}$$
$$= (\overline{B} + \mathbf{1})(\overline{A} + \mathbf{1}) \qquad \text{(P4a)}$$

$$= \mathbf{1} \bullet \mathbf{1} = \mathbf{1} \qquad \text{(T2a,T1b)}$$

Analogamente risulta:

$$(\overline{A} + \overline{B})\, AB = AB\,\overline{A} + AB\overline{B} \qquad \text{(P3b)}$$
$$= B\,\mathbf{0} + A\,\mathbf{0} \qquad \text{(P4b)}$$
$$\mathbf{=0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \text{(T2b,T1a)}$$

I due teoremi di De Morgan devono la loro importanza al fatto che permettono di trovare il complemento di una espressione booleana, comunque complessa, applicando, in modo ricorrente, la regola seguente, derivata dai teoremi stessi: *Il complemento di una espressione booleana si trova sostituendo agli operatori di somma quelli di prodotto e viceversa, e agli operandi il loro complemento.*

1.4 Esercizi

a) Dimostrare che $(A + B)(\overline{A} + C) = \overline{A}B + AC$;

b) Dimostrare che $A + \overline{A}B = A + B$;

c) Dimostrare che $(A + B)(A + \overline{C}) = A + B\overline{C}$;

d) Dimostrare che $f(A,B) = \overline{A}\overline{B} + AB = \overline{f}(\overline{A},B)$

e) Dimostrare che per la f dell'esercizio d) risulta: $\overline{f}(\overline{A},B) = \overline{f}(A,\overline{B})$;

f) Dimostrare che $g(A,B) = A\overline{B} + \overline{A}B = \overline{g}(\overline{A},B) = \overline{g}(A,\overline{B})$;

g) Perchè possiamo usare le espressioni booleane per descrivere i circuiti logici?

h) Quali sono fisicamente gli elementi della classe K nel caso di circuiti logici?