

Il Settore di Higgs del Modello Standard

Università di Padova

Corso Fisica Subnucleare - II anno laurea specialistica
Simonetto/Dorigo, AA 2008/09

Tommaso Dorigo

dorigo@pd.infn.it

Sommario

PARTE I: La lagrangiana del Modello Standard

- Introduzione alle simmetrie di gauge
- Simmetrie esatte, rotte, nascoste
- Il teorema di Goldstone
- Rottura della simmetria di gauge e meccanismo di Higgs
- Lagrangiana del Modello Standard
- Accoppiamenti, masse e implicazioni
- La running coupling constant della QCD

PARTE II: Fenomenologia del bosone di Higgs e ricerche sperimentali

- Considerazioni teoriche
- Correzioni radiative e constraints da fit elettrodeboli
- Decadimenti
- Meccanismi di produzione in collisioni elettrone-positrone
- Meccanismi di produzione ai colliders adronici
- Ricerche dirette a LEP II e limiti sperimentali
- Ricerche del bosone di Higgs al Tevatron
 - Apparatı sperimentali: CDF e D0
 - Sezioni d'urto, stati finali accessibili
 - Tecniche sperimentali
 - Qualche esempio in dettaglio
- **Prospettive della ricerca a LHC**

Testi consigliati

- F. Halzen, A.D. Martin, “*Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*”, Wiley 1984
 - Cap. 14, 15
- W.E. Burcham, M. Jobes, “*Nuclear and Particle Physics*”, Longman 1995
 - Cap. 13
- R.K. Ellis, W.J. Stirling, B.R. Webber “*QCD and Collider Physics*”, Cambridge J.P. 1996
 - Cap. 8, 10, 11

Altri testi utili (livello più avanzato):

- L.B. Okun, “*Leptoni e Quarks*”, Ed. Riuniti 1986
 - Cap. 19, 20
- F. Mandl, G. Shaw, “*Quantum Field Theory*”, Wiley 1984
 - Cap. 11, 12, 13
- J.F. Donoghue, E. Golowich, B.R. Holstein “*Dynamics of the Standard Model*”, Cambridge U.P. 1992

A word of warning

Non sono un'enciclopedia

- Dimentico cose, a volte (raramente) dico fesserie – la maggior parte delle volte mi correggo, dopo.
- A volte potrò dimenticare di spiegarvi con chiarezza dove sto andando a parare: se sentite qualche argomentazione di cui non capite l'origine o l'arrivo, e non vi siete appena svegliati, fermatemi.

Non sono un teorico

- La mia conoscenza dei calcoli teorici soggiacenti ad alcune parti della trattazione è arrugginita
 - Avrete una prospettiva “sperimentale” degli argomenti
 - Per fortuna molti di voi seguono il corso di Feruglio!
- Mi potrà capitare di non saper o non voler rispondere a qualche domanda ben congegnata:
 - menzione onorevole se si tratta di un punto rilevante, e risponderò alla lezione successiva;
 - altrimenti verrete ignorati se i concetti necessari sono al di là dello scopo del corso.

Sono qui per migliorare, come voi

Voi imparerete quello che noi (professori) non impareremo e noi impareremo quello che voi non imparerete.

Inoltre:

1 volta andrò molto veloce

– E' un segno che considero quello che vedete nelle slides cose già note, non che devo prendere il treno!

- Se non riuscite a seguirmi potete interrompermi, e in genere vi darò ascolto
 - ma vi potrei anche dire di riguardarvi il materiale per conto vostro

1 volta ripeterò i concetti più volte

– Segno che vorrei li apprezzaste e che ve li chiederò all'esame

1 volta salterò qualche slide

– Potrebbe servirmi ad arrivare in fondo a una lezione, con l'impegno di tornarci al momento opportuno

– Oppure può darsi che si tratti di materiale superfluo

Tutte le slides che vedrete saranno disponibili in rete a fine corso

– Non prima perché intendo rivederle dopo averle presentate

– Le slides sono *verbose* per vostro comodo – dovrebbero risultare leggibili e aiutare chi ha perso una lezione a ricostruirne il percorso

in verde ci sono alcuni **esercizi per casa**

– Dovrebbero essere alla vostra portata – non spaventatevi!

Per stimolarvi non ve ne darò soluzione immediatamente ma potrete

PARTE I

– la lagrangiana del Modello Standard

- Introduzione alle simmetrie di gauge
- Simmetrie esatte, rotte, nascoste
- Il teorema di Goldstone
- Rottura della simmetria di gauge e meccanismo di Higgs
- Lagrangiana del Modello Standard
- Accoppiamenti, masse e implicazioni
- La running coupling constant della QCD

Introduzione: Simmetrie di gauge e MS

Alta energia le interazioni forte, em e debole sembrano indipendenti: hanno dimensioni d'urto che differiscono di **12 ordini di grandezza** → diverse costanti di accoppiamento

Aspirazione di descrivere queste interazioni con un unico campo unificato, ad alta energia, ricevute verso la fine degli anni '60 una spinta dalla formulazione di Glashow, Salam, Weinberg) dell'unificazione elettrodebole.

Il passo teorico più importante in questa direzione è realizzare che le interazioni fondamentali sono invarianti per trasformazioni locali di gauge

Per formulare una teoria di gauge bisogna scrivere una lagrangiana che descriva la cinematica e le interazioni fra i campi, e sia **invariante sotto trasformazioni di simmetria che permettano la conservazione delle quantità rilevanti**: carica elettrica, colore, isospin e ipercarica deboli. Queste quantità sono conservate naturalmente, per non entrare in conflitto con la relatività speciale.

invarianza globale di gauge \rightarrow conservazione carica elettrica

L'imposizione di invarianza locale di gauge per la lagrangiana di un campo di Dirac forza l'introduzione di una derivata covariante, e un campo di gauge A_μ associato al fotone. Si ottiene la lagrangiana di QED

invarianza locale di gauge \rightarrow introduzione di un campo vettoriale a massa nulla (consistente con il range infinito dell'interazione). **Un termine di massa per il fotone romperebbe l'invarianza di gauge** per via delle proprietà di trasformazione del campo A_μ .

Questo vale per qualunque bosone vettore. I bosoni deboli non sfuggono alla logica. Se vogliamo invarianza locale di gauge, i bosoni rimangono a massa nulla.

Invarianza di gauge globale

La lagrangiana di elettrone libero $L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$

è invariante per trasformazioni U(1) globali $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\Lambda}\psi$

Il valore $0 = \delta L = 2q\Lambda \partial^\mu (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$

per arbitrari valori della fase globale Λ .

s. n.1 per casa: dimostrare l'affermazione qui sopra, usando le equazioni di Eulero - Lagrange)

ciò implica la conservazione di una quadricorrente

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

quindi della carica elettrica q , integrando nelle coordinate spaziali e usando il teorema della divergenza:

Invarianza di gauge locale e QED

Lagrangiana di elettrone libero

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

è invariante per trasformazioni U(1) locali

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\Lambda(x)}\psi$$

se si introduce una corrispondente variazione nella legge di trasformazione derivate del campo fermionico, una *derivata covariante*

$$D_\mu \psi \rightarrow e^{iq\Lambda(x)} D_\mu \psi \quad D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$$

il campo vettoriale A trasforma come segue: $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x)$

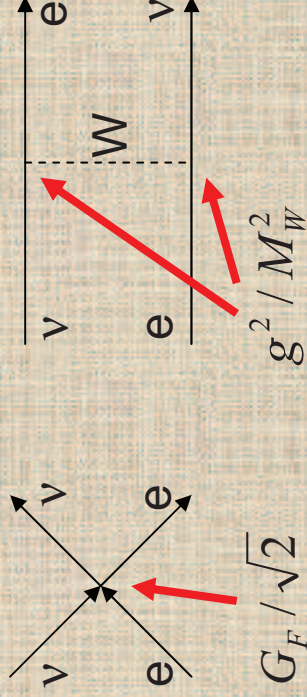
Lagrangiana che deriva dall'inserimento della derivata covariante D contiene ora termine di accoppiamento della corrente vettoriale e il campo A:

$$L = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - qA_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$

contrasto con la richiesta formale di bosoni massless nella teoria, l'esistenza di correnti deboli cariche mediate da bosoni vettori massivi è necessaria per evitare divergenze nelle sezioni d'urto di scattering.

Esempio: ν_e -e scattering $\rightarrow \sigma$ prop. a $G^2 s$, mentre l'unitarietà dello sviluppo in onde parziali della sezione d'urto ($J=1$) implica che σ sia minore di $1/s \rightarrow$ per

$1/G = 9E4 \text{ GeV}^2$ la sezione d'urto viola l'unitarietà.



vece, se il propagatore del W contiene un termine di massa, esso rende finita la sezione d'urto.

La violazione dell'unitarietà nei diagrammi all'ordine più basso e non rinormalizzabilità dei diagrammi ad ordini superiori sono strettamente legate: l'una implica l'altra.

In ogni caso, due bosoni W^+ e W^- non bastano a rendere la teoria consistente: la sezione d'urto del processo di produzione di coppie WW rimane divergente, sia per

La divergenza del processo $\nu\nu \rightarrow WW$ si può neutralizzare con diagrammi mediati da un bosone neutro massivo Z . Esso permette anche di neutralizzare la divergenza del processo elettromagnetico, mediante diagrammi che singolarmente sono divergenti.

– NB: La predizione di processi con correnti deboli neutre (come lo scattering $\nu_\mu e$), che –se mediati da scambio di un solo bosone vettore dovevano avere sezioni d'urto comparabili a quelli con scambio di corrente carica (come $\nu_e e$)- fu **uno dei grandi successi della teoria elettrodebole.**

La cancellazione è possibile solo se gli accoppiamenti ai leptoni dei bosoni W, Z, γ sono di intensità confrontabile: $g \sim e$.

Questa unificazione elettrodebole necessita che W e Z abbiano masse dell'ordine dei 100 GeV. Ciò apparentemente è in conflitto con l'invarianza locale di gauge della lagrangiana.

Adedremo che l'introduzione di un campo scalare h e un meccanismo appropriato risolvono il problema. In più, h permette la convergenza dello scattering $WW \rightarrow WW$, che rimaneva divergente (anche se in maniera meno severa degli altri processi discussi sopra).

Perché insistere con la gauge locale?

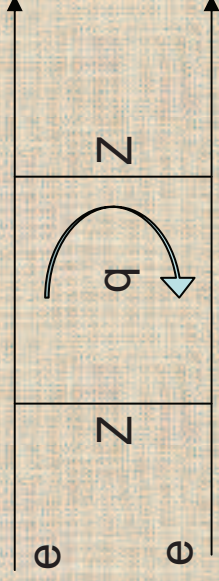
I fotoni che i gluoni hanno massa nulla, e questo si sposa bene con la struttura delle diverse lagrangiane con invarianza di gauge.

Le interazioni deboli, che richiedono bosoni vettori di massa $O(100 \text{ GeV})$, questo è invece un problema. Ma perché non dimenticarsi dell'invarianza locale e aggiungere a \mathcal{L} termini di massa?

Ma fa questo, si finisce in una teoria senza senso, perché ogni quantità calcolabile da essa avrà divergenze non rinormalizzabili.

Il problema è nello scattering fra due elettroni. I diagrammi come quello a fianco contribuiscono all'ampiezza con

termini del tipo $\int d^4 q (\text{propagatori})$



che in QED la forma $1/q^2$ del propagatore dei due fotoni scambiati rende finito l'integrale, mentre per i bosoni massivi il risultato diverge, data la costanza del propagatore a q^2 grande:

$$i \frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M^2}{q^2 - M^2} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{i q_\mu q_\nu}{q^2 M^2}$$

... si regolarizza l'integrale introducendo un cut-off si scopre che altri diagrammi con più

rottura spontanea di una simmetria discreta

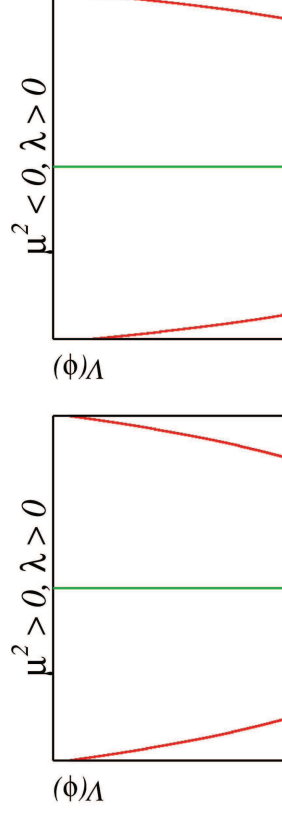
$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \left(\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4\right)$$

Se $\lambda > 0$, essa possiede una simmetria discreta rispetto all'operazione di inversione $\phi \rightarrow -\phi$.

Se prendiamo $\mu^2 > 0$, L descrive una particella a spin 0 e massa μ ; il termine quartico nel campo detta l'autointerazione del campo con vertici a tre e a quattro particelle, con un autoaccoppiamento di intensità λ .

Se invece, se prendiamo $\mu^2 < 0$, non sappiamo come interpretare il termine ϕ^2 , perché **la massa della particella sarebbe immaginaria.**

Il grafico del potenziale nei due casi mostra che per $\mu^2 > 0$ lo stato $\phi = 0$ è un minimo, nel caso $\mu^2 < 0$ invece il minimo si ha per



in fisica delle particelle non siamo in grado di calcolare la fisica esattamente, ma dobbiamo ricorrere a espansioni perturbative attorno a un minimo del potenziale,

opportuno operare una traslazione del campo attorno al minimo:

$$\phi(x) = v + \eta(x)$$

ottiene allora una nuova forma per L (che descrive la stessa fisica!):

$$L' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \lambda v^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4$$

Questa lagrangiana ha un termine di massa del segno corretto per la situazione $\eta(x)$, mentre i termini di ordine superiore in η rappresentano le autointerazioni del campo.

La massa del campo scalare è ricavabile dal termine quadratico:

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

Abbiamo quindi scoperto che nel caso $\mu^2 < 0$ L e L' rappresentano in effetti un campo scalare massivo. In teoria delle perturbazioni L'

Le considerazioni sulla “rottura” di simmetria

traslazione operata nel campo, che trasforma L in L' , rende nascosta la simmetria: intorno al punto di minima energia L' non è più in variante per trasformazioni $\phi \rightarrow -\phi$.
La presenza di una degenerazione nello stato di vuoto che rende arbitraria la scelta di ϕ , e di conseguenza nasconde la simmetria originale di L .

tuttavia per valori grandi dell'energia (rispetto alla massa del campo), la teoria ritorna ad avere la sua simmetria per riflessione: in quel caso, la massa della fluttuazione quantistica m non è più rilevante per determinare la fisica, e la simmetria ritorna ad essere evidente.

Sono in natura diversi sistemi che manifestano lo stesso meccanismo. Sono tutti esempi della stessa situazione: casi in cui è energeticamente favorevole per lo stato fondamentale avere un valore non nullo di un campo.

Consideriamo $V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$: i due minimi degeneri si trovano a $V < 0$. Con l'aggiunta di una costante (che non cambia l'equazione dei campi!) si può riscrivere V in modo che il vuoto si trovi a $V' = 0$:

$$V'(\phi) = \frac{1}{4} \mu^4 / \lambda + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 = \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 + \mu^2 / \lambda)^2.$$

I dati sull'espansione dell'universo, l'energia del vuoto è sì negativa, ma estremamente piccola rispetto al valore indicato da V , che per $\lambda = 1$, $\mu = 1 \text{ GeV}$ vale 10^{41} GeV/cm^3 (da confrontare con 10^{-6} GeV/cm^3 che è l'energia media dell'universo).

Simmetrie esatte, nascoste, e rotte

Seconda della dinamica della teoria, le simmetrie della funzione L possono manifestarsi in molti modi diversi.

La simmetria di L rimane una simmetria della fisica che ne ha origine. Esempi sono U(3) di colore o U(1) elettromagnetica

La simmetria di L è solo apparente, perché in realtà essa ha un'anomalia. U(1) assiale è un esempio nello SM. Un'anomalia avviene quando una simmetria dell'azione non è una vera simmetria della teoria quantistica corrispondente. Non ce ne occupiamo in questo corso (a parte un accenno nell'introduzione al top quark).

La simmetria di L può essere rotta esplicitamente da termini non invarianti. Un esempio è la simmetria di Isospin SU(2) tra **u** e **d**, che è rotta dall'elettromagnetismo e dalla differenza di massa dei due quarks. E' una **simmetria approssimativa**.

La simmetria di L può infine essere nascosta, ovvero l'operazione può lasciare L invariante ma **modificare lo stato fondamentale**. In questo caso non è apparente la simmetria nello spettro degli stati fisici. Ci sono due modi in cui questo può accadere:

- Uno o più campi scalari acquistano valori diversi da zero nel vuoto: si tratta di rottura spontanea di simmetria, il cui esempio più lampante è SU(2)_L rotta dal campo di Higgs nelle interazioni deboli

Il teorema di Goldstone

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

Consideriamo ora un campo scalare complesso

$$L = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$

In questo caso invariante per una trasformazione di fase globale $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$:
Esiste una simmetria per trasformazioni $U(1)$ e la fisica non dipende da α .

Consideriamo $\lambda > 0$, $\mu^2 < 0$ ed esplicitiamo la dipendenza di L dalle componenti reali e immaginarie di ϕ :

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

Si vede che in questa formulazione il potenziale $V(\phi)$ ha un minimo per tutti i valori del campo tali che $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 = -\mu^2/\lambda$.

Ad ogni valore di v abbiamo un'infinità continua di minimi per V , organizzati in una sfera di raggio v attorno a $\phi=0$. Come nel caso scalare reale, ci troviamo in presenza di una degenerazione continua del minimo attorno al quale emergeranno i bosoni di Goldstone.

liamo espansioni intorno al vuoto $\phi_1=v$, $\phi_2=0$ scrivendo

$$\phi(x) = [v+\eta(x)+i\xi(x)]/2^{1/2}$$

stituiamo l'espressione in L. Otteniamo una nuova forma L' :

$$L' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2 \eta^2 + c + (\eta^3) + (\eta \xi^2) + (\eta^4) + (\xi^4) + (\eta^2 \xi^2)$$

si sono espressi in forma concisa i coefficienti nei termini di interazione dei campi.

essa con ξ e η L' possiede due termini cinetici ma un termine di massa per η :

$$m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$$

mpo ξ tangenziale alla circonferenza di minimo potenziale **non incorre in tenza dal potenziale per piccole oscillazioni intorno al minimo (v,0)**, e ne a massa nulla. E' la presenza di una degenerazione dello stato di o a mantenere nulla la sua massa.

Il caso considerato è solo un caso particolare di un teorema generale, il teorema di Goldstone: la rottura spontanea di una simmetria *continua* genera bosoni scalari a massa nulla.

→ **Esercizio per casa n°2: dimostrare che la lagrangiana per tre campi scalari interagenti**

$$L = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \lambda (\phi_i \phi_i)^2$$

descrive un campo scalare massivo e due campi scalari a massa nulla.

(Hint: trovare l'espressione del minimo del potenziale, e scegliere opportunamente il valore del campo nei dintorni del vuoto.)

Quanto visto sembra implicare che la strada che stiamo investigando per dotare la nostra teoria elettrodebole di bosoni massivi è destinata a fallire, in quanto oltre ai bosoni massivi si generano campi scalari a massa nulla che non si osservano in natura: **non esistono particelle scalari a $m=0$!**

Tuttavia, vedremo che succede qualcosa di diverso quando si applica il

Il meccanismo di Higgs

dello di Goldstone ora visto si può dotare dell'interazione
 cromagnetica tenendo presente il principio di gauge e passando a
 simmetria U(1) locale:

$$L = (\partial_\mu - iqA_\mu)\phi^* (\partial^\mu + iqA^\mu)\phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

scelgendo lo stato di vuoto in $(v,0)$ e scegliendo l'espansione
 della lagrangiana diventa

$$= \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda v^2 \eta^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) \right] + \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu - qv A_\mu \partial^\mu \xi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots$$

una difficoltà rispetto a prima: il campo scalare η ha ora massa
 $(2\lambda v^2)^{1/2}$, ξ è rimasto a massa nulla, e il campo di gauge A_μ ha massa
 questo corrisponde a **un grado di libertà in più rispetto alla**
 lagrangiana di partenza!

iamo allora il campo nella forma modulo*exp(fase):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + H(x)] e^{[i\theta(x)/v]}$$

ra applichiamo al campo una gauge locale U(1) abbiamo

$$\phi'(x) = e^{[iq\Lambda(x)]} \phi(x)$$

Il che significa che dobbiamo avere

$$\Rightarrow [v + H'(x)] e^{[i\theta'(x)/v]} = e^{[iq\Lambda(x)]} [v + H(x)] e^{[i\theta(x)/v]}$$

io segue che le fluttuazioni H' e θ' devono trasformare come:

$$H'(x) = H(x)$$

$$\theta'(x) = \theta(x) + qv\Lambda(x)$$

indi chiaro che scegliendo la fase

$$\Lambda(x) = -\frac{1}{qv} \theta(x)$$

NB: nel caso del campo scalare complesso con L invariante per U(1) **globale** $e^{i\alpha}$, nessuna scelta della fase costante α può cancellare il campo $\xi(x)$, qui invece la simmetria per fasi $\Lambda(x)$ dipendenti da x ce lo permette!

chiaro che i bosoni di Goldstone sono “oscillazioni” nel parametro e distingue diversi stati di vuoto: la fase $q\Lambda(x)$. Scegliendo la gauge unitaria abbiamo rimosso il grado di libertà non voluto.

Quando le regole di trasformazione del campo scalare e del campo di gauge per $U(1)$ locale, con la scelta della fase vista sopra:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q\nu} \partial_\mu \theta(x)$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\nu + H(x)]$$

possiamo allora riscrivere la lagrangiana:

$$L = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \lambda \nu^2 H^2 \right] + \frac{1}{2} q^2 \nu^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu H^2 + q^2 \nu A_\mu A^\mu H - \lambda \nu H^3 - \frac{1}{4} \lambda H^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \lambda \nu^4$$

Come promesso, L non contiene traccia della fase $\theta(x)$.

trasformazione di L in una forma che esplicita il trasferimento di

Trasformazioni SU(2) e Yang-Mills

Per introdurre il modello standard conviene prendere in considerazione due campi di Dirac che trasformino come un doppietto per una simmetria interna SU(2) di isospin.

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Chiediamo che la lagrangiana sia invariante per trasformazioni SU(2) locali infinitesime:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ig\Lambda \cdot \tau / 2} \psi = [1 + ig\Lambda \cdot \tau / 2]\psi$$

Generatori di SU(2) non commutano (il gruppo non è abeliano):

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}$$

Per analogia con la QED possiamo richiedere la gauge invarianza locale usando derivate covarianti:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau^j}{2} W_\mu^j$$

I campi W devono trasformare come segue:

$$W_\mu \rightarrow W_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda + g\Lambda \wedge W_\mu$$

Il termine cinetico dei campi contiene ora un'autointerazione dei W, in quanto

Il meccanismo di Higgs in SU(2)

Adesso consideriamo la rottura spontanea della simmetria locale di SU(2). Questo gruppo non è scelto a caso, ma è il punto di arrivo di una serie di indagini di Glashow, Salam e Weinberg per inserire in una teoria di gauge i fotoni massivi W. Il fotone arriverà includendo U(1)...

La Lagrangiana che descrive un doppietto di campi scalari: 4 gradi di libertà. Ci servono 3 di essi per dotare i bosoni vettori della teoria GSW di massa...

$$L = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad \phi \rightarrow \phi' = e^{i\Lambda_j \tau_j} \phi$$

una trasformazione SU(2) globale dei campi ϕ ,

per renderla localmente invariante. Per renderla localmente invariante introduciamo un **campo di gauge** $A_\mu(x)$ e rimpiazziamo la

derivata con una covariante:
$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j$$

un tripletto di campi di gauge

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = [1 + \Lambda(x) \cdot \tau / 2] \phi(x)$$

Introduzione della derivata covariante, la lagrangiana diventa

$$L = (\partial_\mu \phi + ig \frac{\tau}{2} W_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi + ig \frac{\tau}{2} W^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

Il termine rappresenta l'energia cinetica dei campi di gauge,

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - g W_\mu \wedge W_\nu$$

La poniamo come al solito $\lambda > 0$, $\mu^2 < 0$, il potenziale $V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$

Il minimo in

$$\phi^\dagger \phi = (\phi_a^* \phi_b^*) \begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{pmatrix} = \phi_a^* \phi_a + \phi_b^* \phi_b = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{v^2}{2}$$

Abbiamo ora $\phi_3^2 = v^2$, "nascondendo" la simmetria SU(2) nello stato di vuoto. Possiamo allora definire il campo nell'intorno del vuoto scelto,

Prendendo una fase tale che

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

NB vedi prossima slide

canonico è lo stesso di quello visto nel caso U(1): possiamo scegliere la direzione degli isospin in ogni punto x dello spazio-tempo per allineare $\phi(x)$ lungo la direzione scelta, prendendo una rotazione SU(2) diversa a seconda di x . Il campo, scritto nella forma canonica "fase", può essere ridotto scegliendo la gauge, come visto prima.

Prendendo nella lagrangiana l'espansione di ϕ intorno al vuoto, troviamo

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \frac{1}{2} g^2 v^2 (W^1)^2 - \frac{1}{2} (W^2)^2 - \frac{1}{2} (W^3)^2 + \dots$$

Sulla generalità della scelta del vuoto

Lo sviluppo nell'intorno del vuoto

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}$$

Si può effettuare con i quattro campi reali $\theta_1, \theta_2, \theta_3, h$ attraverso la formulazione

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h(x) \end{pmatrix} e^{i\tau \cdot \theta(x) / \nu}$$

Questo è perfettamente generale in quanto, per piccole perturbazioni,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\theta_3 / \nu & 0 \\ i(\theta_1 + i\theta_2) / \nu & 1 - i\theta_3 / \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h(x) \end{pmatrix} =$$

Un richiamo: l'ipercarica debole

scrivono le correnti deboli cariche

$$j_{\mu}^{+} = \bar{\nu}_L \gamma_{\mu} e_L$$

$$j_{\mu}^{-} = \bar{e}_L \gamma_{\mu} \nu_L$$

matrici di Pauli operanti su doppietti di fermioni left-handed, si hanno correnti charge-
g e charge-lowering:

$$j_{\mu}^{\pm} = \bar{\chi}_L \gamma_{\mu} \tau^{\pm} \chi_L$$

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$$

è utile poter esprimere le interazioni deboli come invarianti sotto rotazioni di isospin
e $SU(2)_L$, ma ci serve una terza corrente di isospin associata a τ_3 :

$$j_{\mu}^3 = \frac{1}{2} \bar{\chi}_L \gamma_{\mu} \tau_3 \chi_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_{\mu} \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_{\mu} e_L$$

a purtroppo non può essere associata a una corrente debole neutra, perché si
tratta solo di stati left-handed, mentre le correnti deboli neutre hanno una componente
right-handed.

Si risolve il problema introducendo $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{Y}/2$, ove ora la corrente e.m. è la somma della terza
componente di isospin debole e della corrente di ipercarica debole. Quest'ultima si accoppia
a doppietti left che ai singoli right-handed.

$$j_{\mu}^{em} = -e_R \gamma_{\mu} e_R - e_L \gamma_{\mu} e_L = j_{\mu}^3 + \frac{1}{2} j_{\mu}^Y$$

Con Y , si crea un

link fra corrente em

e correnti deboli

Lagrangiana del Modello Standard

so finale per scrivere una lagrangiana delle interazioni elettrodeboli con tre
ni vettori massivi e un fotone a massa nulla consiste nel considerare il
o $SU(2)_L \times U(1)_Y$ e richiedere l'invarianza di gauge locale indipendentemente
e sottogruppi.

ampi fermionici L si scrive allora

$$L = \overline{\psi}_L \gamma^\mu [i\partial_\mu - gI \cdot W_\mu - \frac{g'}{2} YB_\mu] \psi_L + \overline{\psi}_R \gamma^\mu [i\partial_\mu - \frac{g'}{2} YB_\mu] \psi_R + \dots$$

esta formulazione tutti i campi hanno ancora massa nulla. **Termini di massa
fermioni rompono anch'essi l'invarianza di gauge di $SU(2)_L$.**

ungendo a L i termini relativi a un doppietto di scalari complessi in forma di
etto di isospin debole con ipercarica $Y=+1$,

$$L = (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

a derivata covariante

$$\mathcal{D}_\mu = [i\partial_\mu - gI \cdot W_\mu - (g'/2) YB_\mu]$$

gliando il vuoto e la sua espansione come al solito, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$

mo che la lagrangiana dei campi bosonici contiene ora i termini

pi W^3 e B sono mescolati dalla scelta della gauge unitaria. Possiamo coppiarli con la combinazione lineare

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W$$

$$Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W$$

abbiamo anche definito $\tan(\theta_W) = g'/g$. Con questa sostituzione si trovano le interazioni trascurando i termini di interazione):

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 - \lambda v^2 H^2 +$$

$$(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1)(\partial^\mu W^{1\nu} - \partial^\nu W^{1\mu}) + \frac{g^2 v^2}{8}(W_\mu^1)^2 +$$

$$(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)(\partial^\mu W^{2\nu} - \partial^\nu W^{2\mu}) + \frac{g'^2 v^2}{8}(W_\mu^2)^2 +$$

$$(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \frac{v^2}{8}(g^2 + g'^2)Z_\mu Z^\mu +$$

$$(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \dots$$

La rottura di $SU(2) \times U(1)$ ha dato vita precisamente allo spettro che volevamo: un bosone scalare massivo, due W e una Z massivi, e un fotone a massa nulla.

Ora abbiamo 8 gradi di libertà dai bosoni vettori e 4 dal doppietto scalare di Higgs. Ora abbiamo tre bosoni massivi ($3 \times 3 = 9$ gradi di libertà), uno massless (2 g.l.) e un bosone di Higgs. I conti tornano!

Relazioni fra gli accoppiamenti

Le equazioni del mescolamento

$$A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W$$

$$Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W$$

Invertite danno

$$W_\mu^3 = A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W$$

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W$$

Si tiene l'interazione di corrente neutra come

$$\mathcal{W}^{\mu 3} + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B_\mu = -i(g \sin \theta_W j_\mu^3 + g' \cos \theta_W \frac{j_\mu^Y}{2}) A_\mu - i(g \cos \theta_W j_\mu^3 - g' \sin \theta_W \frac{j_\mu^Y}{2}) Z_\mu$$

Da qui, si identifica subito l'interazione elettromagnetica, che ha il coefficiente e , per cui

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e$$

Si ricava, usando la relazione fra correnti

$$j_\mu^Y = 2j_\mu^{em} - 2j_\mu^3$$

Considerazioni aggiuntive

possiamo trovare una **simmetria residua** del vuoto, descritta da un sottogruppo del gruppo $(2)_L \times U(1)_Y$? In tal caso il bosone di gauge associato rimane a $m=0$, come sempre.

In effetti se applichiamo **Q** allo stato di vuoto troviamo **$Q\phi_0 = (I_3 + Y/2)\phi_0 = 0$** per cui il vuoto che abbiamo scelto è effettivamente invariante per una $U(1)$ locale generata da **Q**:

$$\phi_0 \rightarrow \phi'_0 = e^{ia(x)Q} \phi_0 = \phi_0$$

I quattro generatori **I** e **Y**, solo la combinazione **Q** lascia il vuoto invariante. **Il fatto che il bosone rimanga a massa nulla non è una previsione del modello, ma è implicita nella scelta di uno stato di vuoto a carica nulla.**

Quando la massa **$M_W = \frac{1}{2}vg$** , e il valore misurato della costante di Fermi e della costante di struttura fine, troviamo:

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}, \quad m_W = \frac{1}{2}vg \Rightarrow v = (\sqrt{2}G)^{-1/2} = 246 \text{ GeV}$$

$$g \sin \theta_W = e, \quad \alpha = e^2 / 4\pi \Rightarrow m_W = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G} \right)^{1/2} \frac{1}{\sin \theta_W}$$

$$m_W \cong 80 \text{ GeV}, \quad m_Z = m_W / \cos \theta_W \cong 90 \text{ GeV}$$

La massa dei fermioni

lagrangiana dei campi di Dirac

$$\overline{\psi}_L \gamma^\mu [i\partial_\mu - gI \cdot W_\mu - \frac{g'}{2} YB_\mu] \psi_L + \overline{\psi}_R \gamma^\mu [i\partial_\mu - \frac{g'}{2} YB_\mu] \psi_R + \dots$$

ammette termini di massa se si vuole **mantenere l'invarianza di gauge**.

ampi di Dirac i termini di massa sono scrivibili come

$$\overline{\psi}_e \psi_e = -m\overline{\psi}_e [\frac{1}{2}(1-\gamma^5) + \frac{1}{2}(1+\gamma^5)] \psi_e = -m(\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R)$$

mescola doppietti e singoletti

	I	I_3	Y
ν_e	$1/2$	$+1/2$	-1
e_L	$1/2$	$-1/2$	-1
e_R	0	0	-2

cordiamo le assegnazioni di isospin e ipercarica debole:

mo che il doppietto scalare scelto per descrivere

mpo di Higgs ha proprio i valori "giusti" per

oppiare fermioni left e right:

$$H(I=1/2, Y=1)$$

$$e_R(I=0, Y=-2)$$

$$e_L(I=1/2, Y=-1)$$

inviando il vuoto e le sue fluttuazioni come al solito, la lagrangiana viene a contenere termini del tipo

$$-\frac{g_e}{\sqrt{2}}\nu(\overline{e_L e_R} + \overline{e_R e_L}) - \frac{g_e}{\sqrt{2}}(\overline{e_L e_R} + \overline{e_R e_L})h$$

È facile identificare con la massa dell'elettrone il termine

$$m_e = \frac{g_e \nu}{\sqrt{2}} \Rightarrow L_m = -m_e \overline{e e} - \frac{m_e}{\nu} \overline{e e} h$$

Quotiamo anche il termine di accoppiamento di H al campo fermionico: esso è proporzionale alla massa del fermione.

È un fatto importante per capire la fenomenologia del bosone di Higgs (lo vedremo più avanti).

È stato notato che il meccanismo di Higgs, che ci è servito a dotare di massa i bosoni vettoriali W e Z – ottenendo una teoria rinormalizzabile e coerente – ci ha fornito anche i termini di massa per i fermioni. Assieme a questi termini abbiamo dovuto considerare anche i termini di accoppiamento, che infatti sono proporzionali a m (m=0 → zero accoppiamento)

Masse e accoppiamenti

Quanto visto sopra per i leptoni carichi si può estendere ai quarks e le masse di questi dipendono anch'esse dal valore di v e da costanti sconosciute g .

In termini del v.e.v. del campo di Higgs, sviluppando il termine quadratico negli spinori le masse dei fermioni si scrivono

$$m_f = 2^{-1/2} g_f v.$$

I valori degli "accoppiamenti di Yukawa" g_f dell'Higgs ai fermioni coprono un vasto range di valori:

$$\begin{array}{lll} g_u = 2 \times 10^{-5} & g_c = 9 \times 10^{-3} & g_t = 1 \\ g_d = 4 \times 10^{-5} & g_s = 8 \times 10^{-4} & g_b = 3 \times 10^{-2} \\ g_e = 3 \times 10^{-6} & g_\mu = 6 \times 10^{-4} & g_\tau = 1 \times 10^{-2} \end{array}$$

Il Modello Standard non solo non predice il valore dei parametri g , ma non ne spiega l'ampio range.

Inoltre, la quasi esatta coincidenza di g_t con 1 è un'osservazione di

Esercizio per casa n°4

Partendo dalla parte di interazione nel termine cinetico del campo scalare espresso attraverso la derivata covariante $SU(2)_X U(1)$:

$$\mathcal{D}_\mu = [i\partial_\mu - gI \cdot W_\mu - (g'/2)YB_\mu]$$

scrivere il campo scalare nell'intorno del vuoto, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$

per poter esprimere i termini di massa e di interazione per mezzo degli stati fisici W^\pm, W^0, Z, γ , e ottenere i termini di massa e accoppiamenti relativi ai bosoni W^\pm, W^0, Z, γ , e fotone. Commentare sulle intensità relative e la presenza o assenza di accoppiamenti fra queste particelle, e le implicazioni.

Verificare che le larghezze sono proporzionali al quadrato degli accoppiamenti al H , e usare i valori ottenuti per prevedere il rapporto fra le larghezze di decadimento

$$\frac{\Gamma(H \rightarrow WW)}{\Gamma(H \rightarrow ZZ)}$$

$$\left| \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{g'}{g} B_\mu}{(-g \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{g'}{g} B_\mu}{2})} \right|^2$$

(Hint: il termine da sviluppare è

Una rivisitazione delle divergenze

Il meccanismo di Higgs è un metodo elegante per introdurre bosoni massivi nella teoria, ma non sarebbe obbligatorio se non fosse per la rinormalizzabilità della teoria

Abbiamo già notato come i processi di scattering di neutrino su elettrone siano divergenti se non si include lo scambio di un bosone massivo W

L'introduzione dei W a sua volta comporta problemi, in quanto si dimostra che lo scattering neutrino- W (un processo praticamente impossibile da generare, ma teoricamente lecito) diverge. Serve un altro diagramma con scambio di Z per rendere la somma convergente!

La soluzione non è unica, ma l'arrangiamento dei bosoni deboli in una struttura grupppale $SU(2)$ è elegante e economica

Lo scattering $WW \rightarrow WW$ mostra come il bosone di Higgs entra direttamente in gioco rendendo convergente il processo. Senza un bosone scalare H accoppiato ai W non ci sarebbe rinormalizzabilità

QCD nel Modello Standard

Abbiamo ignorato le interazioni forti. Esse possono essere introdotte in modo diretto secondo lo schema della QED, con alcune importanti differenze.

QCD è basata su una simmetria esatta, SU(3) di colore, che governa le interazioni della fase

$$\text{ampi di colore dei quarks: } \psi_q(x) \rightarrow \psi'_q(x) = e^{ig_s \Lambda_a(x) T_a} \psi_q(x)$$

Generatori di SU(3) non commutano tra loro, questo porta a un'autointerazione dei gluoni, e per i bosoni vettori deboli:

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$$

come per la QED, se si parte da

lagrangiana per quarks liberi e si impone

una simmetria SU(3) locale, si è

costretti a introdurre una covarianza derivata, con otto campi

vettoriali G (corrispondenti

agli 8 generatori) che

$$\psi_q(x) \rightarrow \psi'_q(x) = [1 + ig_s \Lambda_a(x) T_a] \psi_q(x)$$

$$G_\mu^a(x) \rightarrow G_\mu^a(x) - \partial_\mu \Lambda^a(x) - g_s f^{abc} \Lambda^b(x) G_\mu^c$$

$$(\mathcal{D}_\mu)_{jk} = \delta_{jk} \partial_\mu - ig_s (T_a)_{jk} G_\mu^a$$

$$L = i \sum_q \bar{\psi}_q^j \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu)_{ik} \psi_q^k - \sum_a \bar{\psi}_a^j \psi_a^j - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu}_a$$

La lagrangiana ora vista descrive quarks colorati e gluoni. Otto gluoni sono necessari a compensare le variazioni arbitrarie nelle fasi $\Lambda_a(x)$ dei tre campi colore dei quarks in ogni punto dello spaziotempo

La **SU(3) di colore è una simmetria esatta della natura: i gluoni hanno massa nulla come il fotone**

I gluoni hanno autointerazioni, a causa della natura non abeliana di SU(3) che ha introdotto nella lagrangiana di QCD i termini misti attraverso le espressioni

$$G_\mu^a(x) \rightarrow G_\mu^a(x) - \partial_\mu \Lambda^a(x) - g_s f^{abc} \Lambda^b(x) G_\mu^c$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c$$

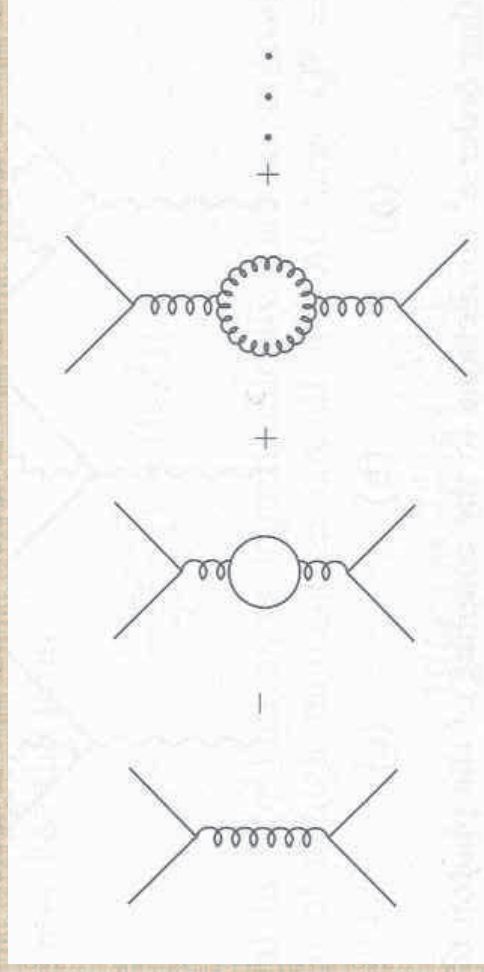
La costante g_s determina l'intensità delle interazioni forti e copre il ruolo di "carica" del campo di colore. Si noti però come essa è sempre associata alle costanti di struttura di SU(3): questo implica diversa intensità per i diversi accoppiamenti qq e gg.

In fine, la natura non abeliana del gruppo SU(3) ha un effetto sulla dipendenza dal quadrimento trasferito della costante di accoppiamento

“Running coupling constant”: $\alpha_s(Q^2)$

Costante di accoppiamento α_s è dipendente
dal momento trasferito nel processo: $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$.

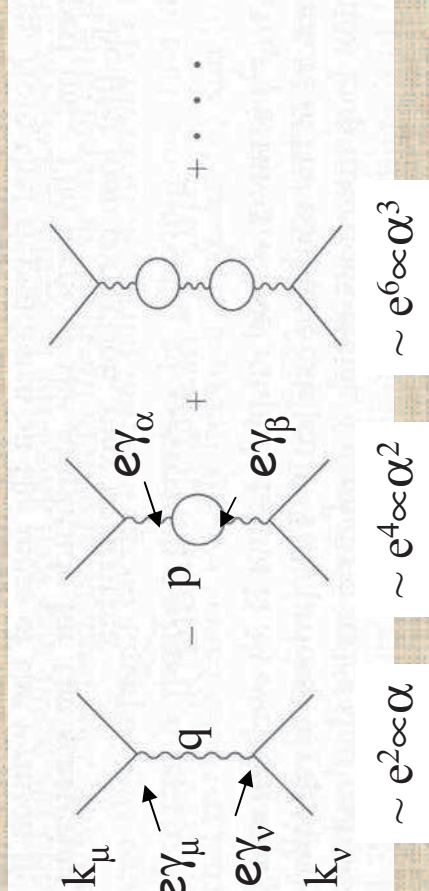
La dipendenza è dovuta alle correzioni perturbative di “ordine superiore”
alla costante di accoppiamento al propagatore del mediatore dell’
interazione (il gluone, per la QCD):



Rinormalizzazione della carica elettrica

in QED: $\alpha_{\text{QED}}(Q^2)$

ED, l'ampiezza di scattering, ad esempio, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, completa a gli ordini perturbativi e' data dai diagrammi:



propagatore nell' elemento di matrice di transizione viene modificato; standoci al 2° termine in α^2 :

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \Rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \left(\frac{-ig_{\mu\alpha}}{q^2} \right) \Pi_{\alpha\beta} \left(\frac{-ig_{\beta\nu}}{q^2} \right)$$

$$\text{Il integrale è } \Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{[\bar{e}u(p)\gamma^\alpha u(p-q)] [\bar{e}u(p-q)\gamma^\beta u(p)]}{p^2 - m^2} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2}$$

tiene

$$\Pi_{\alpha\beta} = -ig_{\alpha\beta} q^2 \Pi(q^2) \quad \text{con:} \quad \Pi(q^2) \equiv \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda}{Q^2}\right) \quad (\alpha_0 = e^2/4\pi)$$

Il integrale diverge per $|p| \rightarrow \infty$ (“divergenza ultravioletta”) e viene controllato dal parametro di cut-off Λ , che verrà riassorbito, come vedremo, nella rinormalizzazione (“rinormalizzazione”) della carica elettrica.

In definitiva, si ha la seguente **modifica nel propagatore introdotta dal 2° ordine perturbativo**:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \Rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} (1 - \Pi(q^2))$$

L'ampiezza di transizione è esprimibile in termini dell'ampiezza $A_0(q^2)$ calcolata al diagramma ‘lowest order’ (anche detto “tree-level”)

$$\alpha \propto \frac{1}{\Lambda^2} \left(1 - \frac{\alpha}{\Lambda^2} \right) \quad \text{dove per comodità} \quad \tilde{\Pi}(\alpha^2) = \frac{\Pi(q^2)}{\Lambda^2} = 1 - \ln\left(\frac{\Lambda}{Q^2}\right)$$

Quando i contributi negli ordini successivi (diagrammi a più loops), si sommano, si ottiene la serie geometrica:

$$A_1(q^2) = \alpha_0 A_0(q^2) (1 - \alpha_0 \tilde{\Pi}(q^2) + \alpha_0^2 \tilde{\Pi}^2(q^2) - \dots) = \frac{\alpha_0 A_0(q^2)}{1 + \alpha_0 \tilde{\Pi}(q^2)}$$

$$\alpha(Q^2) A_0(q^2)$$

L'ampiezza completa a tutti gli ordini perturbativi è esprimibile tramite l'ampiezza al primo ordine in α , moltiplicata per la costante di accoppiamento "rinormalizzata":

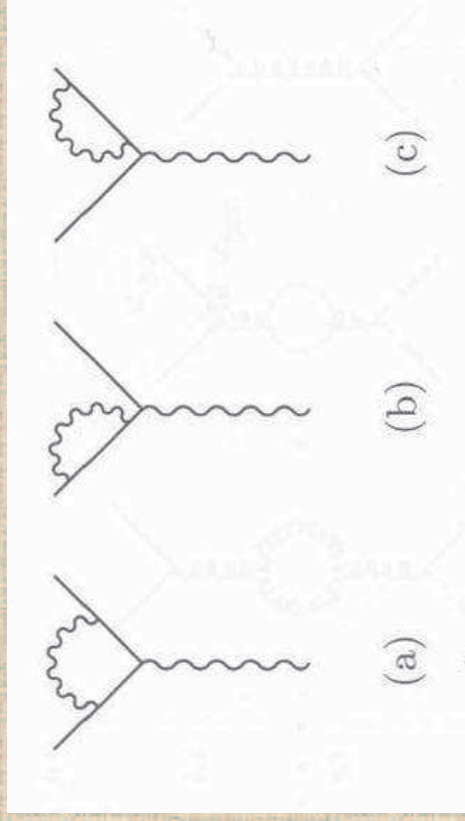
$$\alpha(Q^2) \equiv \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)}$$

ossia:

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} \equiv \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right) \quad (1)$$

Rinormalizzazione in QED: $\alpha_{\text{QED}}(Q^2)$

notato inoltre che a priori la ridefinizione della carica elettrica è fatta anche dai contributi “esterni” al propagatore fotonico:



via si dimostra, come conseguenza della invarianza di gauge della teoria, che i contributi (b) + (c) si cancellano col contributo (a) (identità di Slavnov-Taylor); estesa alle teorie di gruppo non abeliane (e.g. la QCD) da Slavnov-Taylor)

invarianza di gauge di una teoria di campo è essenziale per garantirne

Rinormalizzazione in QED: $\alpha_{\text{QED}}(Q^2)$

li esperimenti, ciò che si misura è $\alpha(Q^2)$ ad una certa scala di momento trasferito (ad esempio, nello scattering Thomson $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$). Il' esperimento che misura il Lamb-shift nella struttura iperfina atomo di idrogeno : $\alpha(Q^2 = \mu^2) \cong 1/137$).

ste misure vanno correlate con le misure a scale diverse (ad esempio $M_Z^2 = (91 \text{ GeV})^2$); dalla (1) si ottiene

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} - \frac{1}{\alpha(\mu^2)} = \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right) - \frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) = -\frac{1}{3\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \quad (2)$$

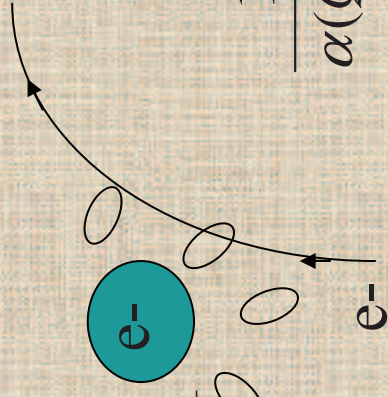
zione tra i due valori è dunque esattamente predetta dalla teoria ed **endente dalla divergenza ultravioletta** (il valore di cut-off Λ nell' integrale per fermionici interni al propagatore del fotone) che è riassorbita nella te di accoppiamento rinormalizzata. Invertendo la precedente si ha

$$\alpha(O^2) \equiv \frac{\alpha(\mu^2)}{\dots}$$

Rinormalizzazione in QED: $\alpha_{\text{QED}}(Q^2)$

costante" di accoppiamento e' quindi una "running coupling constant";
ED, essa **cresce logicamente** con l' impulso trasferito.

alitativamente, la cosa può essere spiegata dalla "polarizzazione del
o": le coppie virtuali e^+e^- che si formano agiscono come i dipoli di un
 ettrico, schermando la carica elettrica "nuda". Quanto più ci si
 cina ad essa, aumentando il momento trasferito nello scattering,
 o maggiore e' la carica elettrica 'vista' nell' interazione.]

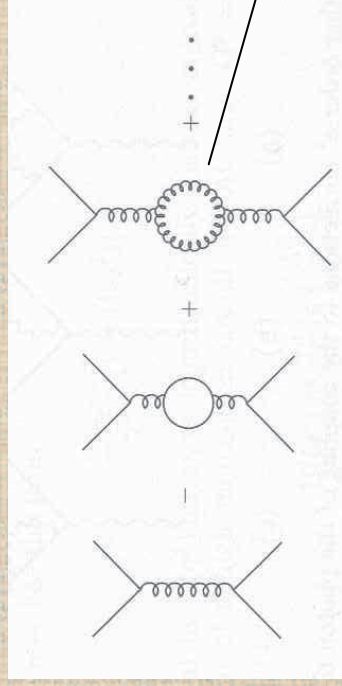


A $Q^2 = M_Z^2 \cong 10^4 \text{ GeV}^2$:

$$\frac{1}{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{\alpha(\mu^2)} - \frac{1}{3\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) = 137 - \frac{1}{3\pi} \ln \left(\frac{10^4}{10^{-18}} \right) \approx 132$$

QCD: $\alpha_s(Q^2)$

QCD il meccanismo e' analogo, ma con l' importante differenza che i gluoni sono portatori di carica di colore:



non esiste il
corrispettivo in QED

Nota che il loop gluonico contribuisce per un fattore $(11/4\pi)\ln(Q^2/\Lambda^2)$ e ognuno degli n_f quarks che alla scala di Q^2 considerata possono essere attivi ($m_f^2 < Q^2/2$) vi e' un fattore $-(1/6\pi)\ln(Q^2/\Lambda^2)$.

Infinitiva per la costante di accoppiamento forte si ha:

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2) \frac{(33 - 2n_f)}{12\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + 0.61 \cdot \alpha_s(\mu^2) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}$$

QCD: $\alpha_s(Q^2)$

costante" α_s decrece col momento trasferito (libertà asintotica"),
 è molto più rapidamente di α_{QED} .
 studio dello spettro degli stati legati del charmonio (stati legati $c\bar{c}$):
 $m_c^2 \cong (3\text{GeV})^2 \cong 0.25$, e propagando alla Z:

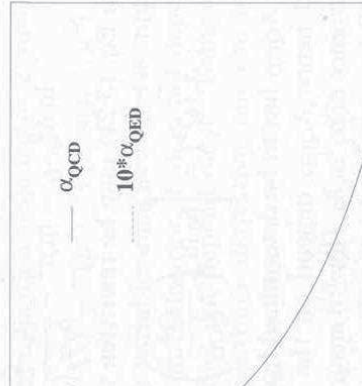
$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + 0.61 \cdot \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) = \frac{1}{0.25} + 0.61 \ln\left(\frac{10^4}{10}\right) \approx 8.2$$

alta si dovrebbe calcolare una doppia propagazione: $\alpha(m_c^2) \rightarrow \alpha(m_b^2)$ con $b_0(n_f=4)=0.66$,
 $m_b^2 \rightarrow \alpha(m_Z^2)$ con $b_0=0.61$; la differenza è piccola]

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.12$$

$$\frac{\Delta\alpha_s}{\alpha_s} = \frac{\alpha_s(M_Z^2) - \alpha_s(10\text{GeV}^2)}{\alpha_s} \approx 50\%$$

Tale predizione è verificata molto bene
 sperimentalmente (dalle misure di $\alpha_s(M_Z^2)$)
 ottenute, ad esempio, dalla forma degli
 eventi di decadimento adronico della Z:



$\alpha_s(Q^2)$ e Λ_{QCD}

ipendenza (3) di $\alpha_s(Q^2)$ può essere riformulata introducendo il **metro dimensionale Λ_{QCD}** :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_s(Q^2)} &= \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + b_0 \cdot \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) = b_0 \left[\frac{1}{b_0 \alpha_s(\mu^2)} + \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \right] \\ &\equiv b_0 \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right) + \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (b_0 \equiv (33 - 2n_f) / 12\pi)$$

$$: \quad \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right) \equiv \frac{1}{b_0 \alpha_s(\mu^2)} \quad \text{ovvero} \quad \ln \Lambda_{\text{QCD}}^2 \equiv \ln \mu^2 - \frac{1}{b_0 \alpha_s(\mu^2)}$$

tale definizione, si trova

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = b_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)$$

definitiva

$$\alpha_s(Q^2) = \left[b_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right) \right]^{-1}$$