Problema

Un sistema quantistico costituito da una particella senza spin, di massa μ, vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R, e' descritto dall'operatore hamiltoniano:

$$H = \frac{\mathbf{L}^2}{2\mu R^2} + \omega L_3 \tag{1}$$

dove L_i $(i = 1, 2, 3)$ sono gli operatori associati al momento angolare orbitale del sistema e μ, R, ω sono parametri reali.

1. Si determinino autovalori e autofunzioni (nelle variabili angolari θ e φ) di H.

2. All'istante $t = 0$ lo stato del sistema e' descritto dalla funzione d'onda

$$\psi_0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi) \tag{2}$$

Si determini la probabilità che una misura di L_3 fatta al generico istante $t > 0$ dia il risultato $\hbar m$, con m intero relativo.

3. Si determini la funzione d'onda al generico istante $t > 0$, nell'ipotesi che nell'intervallo temporale considerato non intervengano misure sul sistema.

4. Si determini la probabilità che al generico istante $t > 0$ il sistema occupi la regione angolare $0 \le \varphi \le \pi/2$.

5. All'istante $\bar{t} = \pi/\omega$ mediante una misura ideale di prima specie, un osservatore accerta che l'energia del sistema è maggiore o uguale a $\hbar^2/(\mu R^2)$. Si determini lo stato del sistema subito dopo la misura.

6. Si determini la probabilità che una misura di L_1 fatta all'istante generico $t > \bar{t}$, dia come risultato $\hbar m$ $(m = -1, 0, +1)$. Si calcoli il valor medio di L_1 per $t > \bar{t}$.