

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA

10.7.2017

NOME:

COGNOME:

numero di matricola:

Riportare le risposte anche su questo foglio. Risposte non riportate qui non verranno prese in esame.

Problema 1

Un sistema quantistico è costituito da una particella di spin 1 immersa in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = (B, 0, 0)$. Trascurando i gradi di libertà legati alla posizione della particella, l'hamiltoniano del sistema è

$$H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B} = -\omega S_x \quad \omega = \gamma B$$

1. Determinarne autovalori E_i e autostati $|\varphi_i\rangle$ dell'hamiltoniano H .

$$E_i = \hbar\omega \{-1, 0, +1\} \quad |\varphi_i\rangle = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 \\ \sqrt{2} \\ +1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 \\ -\sqrt{2} \\ +1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Si considerino le grandezze fisiche A e B che nella base $\{|m\rangle\}$ ($m = +1, 0, -1$) degli autostati di S_z sono descritte dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} a \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b \quad , \quad a, b \neq 0$$

Quali tra i seguenti insiemi formano un insieme completo di osservabili compatibili? Sbarrare gli insiemi scelti.

$$\{A\} \quad \{B\} \quad \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \quad \{\mathbf{A}, \mathbf{H}\} \quad \{B, H\} \quad \{A, B, H\}$$

3. All'istante $t = 0$ si misurano in successione le grandezze B e A ottenendo come risultati 0 e 0. Si determini lo stato $|\psi(0)\rangle$ subito dopo le misure, esprimendolo come vettore nella base $\{|m\rangle\}$.

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Quali sono le probabilità $W_{t>0}^{S_z}(m)$ che una misura di S_z eseguita al generico istante $t > 0$, fornisca come risultato $\hbar m$? Si fornisca il risultato per tutti i valori possibili di m .

$$W_{t>0}^{S_z}(m) = (1/2 \cos^2 \omega t, \sin^2 \omega t, 1/2 \cos^2 \omega t) \quad (m = +1, 0, -1)$$

Problema 2

Una particella con momento angolare $l = 1$ e spin $s = 1/2$ si trova nello stato $|0, +1/2\rangle$ relativo a $l_z = 0$ e $s_z = +\hbar/2$. Con riferimento al momento angolare totale $\vec{J} = \vec{l} + \vec{s}$ e alla sua componente J_z lungo l'asse z , quali sono i possibili risultati ($\hbar^2 j(j+1)$, $\hbar m$) di una misura di J^2 e J_z e le rispettive probabilità? (Dare la risposta in termini di (j, m))

$$W(j = 3/2, m = +1/2) = \frac{2}{3}$$

$$W(j = 1/2, m = +1/2) = \frac{1}{3}$$