

# PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA

10.7.2017

NOME:

COGNOME:

numero di matricola:

**Riportare le risposte anche su questo foglio. Risposte non riportate qui non verranno prese in esame.**

## Problema 1

Un sistema quantistico è costituito da una particella di spin 1 immersa in un campo magnetico uniforme e costante  $\vec{B} = (B, 0, 0)$ . Trascurando i gradi di libertà legati alla posizione della particella, l'hamiltoniano del sistema è

$$H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B} = -\omega S_x \quad \omega = \gamma B$$

1. Determinarne autovalori  $E_i$  e autostati  $|\varphi_i\rangle$  dell'hamiltoniano  $H$ .

$$E_i = \hbar\omega \{-1, 0, +1\} \quad |\varphi_i\rangle = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 \\ \sqrt{2} \\ +1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 \\ -\sqrt{2} \\ +1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Si considerino le grandezze fisiche  $A$  e  $B$  che nella base  $\{|m\rangle\}$  ( $m = +1, 0, -1$ ) degli autostati di  $S_z$  sono descritte dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{pmatrix} a \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b \quad , \quad a, b \neq 0$$

Quali tra i seguenti insiemi formano un insieme completo di osservabili compatibili? Sbarrare gli insiemi scelti.

$$\{A\} \quad \{B\} \quad \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \quad \{\mathbf{A}, \mathbf{H}\} \quad \{B, H\} \quad \{A, B, H\}$$

3. All'istante  $t = 0$  si misurano in successione le grandezze  $B$  e  $A$  ottenendo come risultati 0 e 0. Si determini lo stato  $|\psi(0)\rangle$  subito dopo le misure, esprimendolo come vettore nella base  $\{|m\rangle\}$ .

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Quali sono le probabilità  $W_{t>0}^{S_z}(m)$  che una misura di  $S_z$  eseguita al generico istante  $t > 0$ , fornisca come risultato  $\hbar m$ ? Si fornisca il risultato per tutti i valori possibili di  $m$ .

$$W_{t>0}^{S_z}(m) = (1/2 \cos^2 \omega t, \sin^2 \omega t, 1/2 \cos^2 \omega t) \quad (m = +1, 0, -1)$$

## Problema 2

Una particella con momento angolare  $l = 1$  e spin  $s = 1/2$  si trova nello stato  $|0, +1/2\rangle$  relativo a  $l_z = 0$  e  $s_z = +\hbar/2$ . Con riferimento al momento angolare totale  $\vec{J} = \vec{l} + \vec{s}$  e alla sua componente  $J_z$  lungo l'asse  $z$ , quali sono i possibili risultati ( $\hbar^2 j(j+1)$ ,  $\hbar m$ ) di una misura di  $J^2$  e  $J_z$  e le rispettive probabilità? (Dare la risposta in termini di  $(j, m)$ )

$$W(j = 3/2, m = +1/2) = \frac{2}{3}$$

$$W(j = 1/2, m = +1/2) = \frac{1}{3}$$