PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

12.9.2017

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Non si possono utilizzare libri, appunti, calcolatrici - Riportare le risposte alle domande anche sul foglio di testo

Domanda 1

In un sistema quantistico associato allo spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ si considerino le due osservabili H e A descritte dalle matrici:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \hbar\omega \quad , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} a \quad , \qquad \omega, a \neq 0 \quad .$$

1.1 Si indichino quali tra i seguenti insieme costituiscono un ICOC (cerchiare le risposte corrette)

$$\{H\} \quad , \qquad \{A\} \quad , \qquad \{\mathbf{AH}\} \quad , \qquad \{\mathbf{H}, \mathbf{A}\} \quad , \qquad \{\mathbf{H^2}, \mathbf{A}\} \quad .$$

1.2 Il sistema viene preparato nello stato $|\psi\rangle = (-i\ 0\ 1)$ mediante due misure di H e A effettuate nell'ordine e in rapida successione (quasi simultanee). Indicare i risultati di tali misure.

$$\text{Per } H \to +2\hbar\omega \qquad\qquad \text{Per } A \ \to -a$$

1.3 Una terza grandezza fisica B con spettro non degenere possiede un autovalore b e un corrispondente autostato $|b\rangle = (0\ 0\ 1)$. Mediante sole misure di H e A si vuole preparare il sistema in uno stato $|\psi'\rangle$ in modo tale che la probabilità $W^B_{\psi'}(b)$ di ottenere b come risultato di una misura di B, fatta con il sistema nello stato $|\psi'\rangle$, sia massima. Quali risultati delle misure di H e A assicurano la massima probabilità $W^B_{\psi'}(b)|_{MAX}$? Determinare $W^B_{\psi'}(b)|_{MAX}$.

$$(H, A) \to (+2\hbar\omega, -a) \quad , \qquad (H, A) \to (0, +a) \quad , \qquad W^B_{\psi'}(b)|_{MAX} = \frac{1}{2}$$

Domanda 2

Un oscillatore armonico unidimensionale è descritto dall'hamiltoniano H

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \qquad\qquad [a, a^\dagger] = 1 \quad .$$

All'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - i\frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale del sistema.

2.1 Si determinino il valor medio $\langle \mathcal{O} \rangle(t)$ e il quadrato della fluttuazione $(\Delta\mathcal{O})^2(t)$ per una misura della grandezza fisica $\mathcal{O} = (XP + PX)$ fatta al generico istante $t > 0$.

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = -\sqrt{2}\hbar\cos 2\omega t \qquad , \qquad (\Delta\mathcal{O})^2(t) = 2\hbar^2(4 - \cos^2 2\omega t) \qquad .$$

Domanda 3

Un atomo di idrogeno si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi_{210}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\cos\theta\ \frac{r}{a_0}\ e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

dove a_0 è il raggio di Bohr.

3.1 Determinare il valor medio $\langle\mathcal{P}\rangle$ della parità

$$\langle\mathcal{P}\rangle = -1$$

3.3 Determinare il valor medio $\langle R\rangle$ della coordinata radiale dell'elettrone

$$\langle R\rangle = 5a_0$$

Integrale utile:

$$\int_0^{+\infty} du\ u^5 e^{-u} = 120$$

Domanda 4

Si consideri una particella di spin 1/2 della quale si trascurino i gradi di libertà spaziali.

4.1 Quali sono i risultati possibili per una misura di $(S_x + S_z)/\sqrt{2}$?

$$\pm\frac{\hbar}{2}$$

4.2 All'istante $t = 0$ si effettua una misura di $(S_x + S_z)/\sqrt{2}$. Determinare la probabilità $W_{0^+}^{S_y}(+\hbar/2)$ che una misura di S_y, effettuata all'istante $t = 0^+$, dia come risultato $+\hbar/2$.

$$W_{0^+}^{S_y}(+\hbar/2) = \frac{1}{2}$$

Domanda 5

Si aggiunga all'hamiltoniano della domanda n. 2 il termine $\mathcal{H}_I = +\lambda(XP + PX)^2$ $(\lambda > 0)$.

5.1 Si determinino gli autovalori E_n del nuovo hamiltoniano al primo ordine perturbativo nella costante λ.

$$E_n = E_n^0 + 2\lambda\hbar^2(n^2 + n + 1)$$