PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

15.12.2014

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Problema 1

All'istante $t = 0$ lo stato di un oscillatore armonico unidimensionale $[V(X) = m\omega^2 X^2/2]$ è

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2n\rangle + |2n+1\rangle) \quad ,$$

dove $|n\rangle$ $(n = 0, 1, ...)$ sono gli autostati dell'Hamiltoniano H.
1.1 Determinare le probabilità $W_t^{\mathcal{P}}(\pm 1)$ che una misura di parità $\mathcal{P}$ fatta al generico istante $t > 0$ dia come risultato ± 1 e il valor medio $\langle \mathcal{P} \rangle_t$.

$$W_t^{\mathcal{P}}(\pm 1) = 1/2 \qquad\qquad \langle \mathcal{P} \rangle_t = 0$$

1.2 All'istante $\bar{t} > 0$ una misura di parità da come risultato -1. Si determinino lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema ad un generico istante successivo $t > \bar{t}$ e il valor medio $\langle X \rangle_t$ della posizione a tale istante.

$$|\psi(t)\rangle = |2n+1\rangle \qquad\qquad \langle X \rangle_t = 0$$

Problema 2

All'istante $t = 0$ la funzione d'onda di una particella libera in una dimensione è

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}px} g(p)dp \qquad\qquad g(p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\Delta p}} & p_0 - \Delta p \leq p \leq p_0 + \Delta p \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad ,$$

dove p_0 e $\Delta p > 0$ sono parametri reali.
2.1 Determinare il valor medio $\langle P \rangle_0$ e il quadrato della fluttuazione $(\Delta P)_0^2$ per misure di impulso effettuate all'istante $t = 0$.

$$\langle P \rangle_0 = p_0 \qquad\qquad (\Delta P)_0^2 = \frac{(\Delta p)^2}{3}$$

2.2 Determinare la probabilità $W_t^P(p \geq p_0)$ che una misura di impulso fatta al generico istante $t > 0$ fornisca un risultato maggiore o uguale a p_0.

$$W_t^P(p \geq p_0) = 1/2$$

2.3 Determinare la densità di probabilità $w_0^X(x)$ relativa a una misura di posizione e il valor medio $\langle X \rangle_0$ della posizione all'istante $t = 0$.

$$w_0^X(x) = \frac{\Delta p}{\pi\hbar} \left(\frac{\hbar}{\Delta p\ x} \right)^2 \sin^2 \frac{\Delta p\ x}{\hbar} \qquad\qquad \langle X \rangle_0 = 0$$

Problema 3

Si considerino l'hamiltoniano H e la grandezza fisica A di un sistema quantistico associato allo spazio Hilbertiano $\mathbf{C}^3$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hbar\omega \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} a$$

con ω e a costanti reali non nulle.

3.1 All'istante $t = 0$ una misura di A da come risultato $+a$. Si determini lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema al generico istante successivo t.

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} -i\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Si determinino le probabilità $W_t^A(\pm a)$, il valor medio $\langle A\rangle_t$ e la fluttuazione $(\Delta A)_t$ relativi a misure di A effettuate al generico istante $t > 0$.

$$W_t^A(+a) = \cos^2\omega t \qquad W_t^A(-a) = \sin^2\omega t \qquad \langle A\rangle_t = a\cos 2\omega t \qquad (\Delta A)_t = |a\sin 2\omega t|$$

3.3 Fornire un esempio di insieme completo di osservabili compatibili che comprenda A.