PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

16.2.2018

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Problema 1

All'istante $t = 0$ un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = c(z-1)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad\qquad z = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

dove c è una costante.

1.1 Punti 3

Determinare la probabilità $W_t^H(E_n)$ che una misura di energia, fatta al generico istante $t > 0$, dia come risultato E_n, per tutti i valori ammessi dell'energia.

$$W_t^H(E_n) = \{9/19, 8/19, 2/19\} \qquad\qquad n = \{0, 1, 2\}$$

1.2 Punti 3

Determinare la funzione d'onda $\psi_t(x)$ (o lo stato del sistema $|\psi_t\rangle$), al generico istante $t > 0$.

$$|\psi_t\rangle = \frac{2}{\sqrt{19}} \left(\frac{3}{2}|\varphi_0\rangle - \sqrt{2}e^{-i\omega t}|\varphi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega t}|\varphi_2\rangle \right)$$

1.3 Punti 4

All'istante $\bar{t} = \pi/\omega$, una misura di energia stabilisce che l'energia del sistema è superiore a $\hbar\omega/2$. Determinare lo stato del sistema $|\psi_{\bar{t}^+}\rangle$ all'istante $\bar{t}^+$, subito dopo la misura.

$$|\psi_{\bar{t}^+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle \right)$$

1.4 Punti 4

Si determinino i valori medi di posizione e impulso, $\langle X \rangle_t$ e $\langle P \rangle_t$, al generico istante $t > \bar{t}^+$.

$$\langle X \rangle_t = -\frac{4}{5}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \cos \omega t \qquad\qquad \langle P \rangle_t = \frac{4}{5}\sqrt{m\omega\hbar} \sin \omega t$$

Domanda 1 - Punti 4

All'istante $t = 0$ una particella libera in una dimensione è descritta da una funzione d'onda $\psi(x)$ la cui trasformata di Fourier $\tilde{\psi}(p)$ vale

$$\tilde{\psi}(p) = \begin{cases} c\,(-p + p_0 + \Delta p) & p_0 \le p \le p_0 + \Delta p \\ c\,(+p - p_0 + \Delta p) & p_0 - \Delta p \le p \le p_0 \\ 0 & |p - p_0| > \Delta p \end{cases} \quad ,$$

dove c è una costante e $\Delta p > 0$ e p_0 sono costanti reali. Determinare la norma della funzione d'onda $\psi(x)$, $||\psi||_t$, il valor medio $\langle P \rangle_t$ e fluttuazione $(\Delta P)^2_t$ dell'impulso e il valor medio della posizione $\langle X \rangle_t$, tutti al generico istante $t > 0$.

$$||\psi||^2_t = \frac{2}{3}|c|^2 \Delta p^3 \qquad \langle P \rangle_t = p_0 \qquad (\Delta P)^2_t = \frac{\Delta p^2}{10} \qquad \langle X \rangle_t = \frac{p_0 t}{m}$$

Domanda 2 - Punti 4

Una particella di spin 1/2, di cui si trascurano i gradi di libertà spaziali, è descritta dall'operatore Hamiltoniano

$$H = i\frac{\omega}{\hbar}\left(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1\right)$$

All'istante $t = 0$ la particella si trova nello stato $|\psi_0\rangle = (1/2|+\rangle - \sqrt{3}/2|-\rangle)$ dove $|\pm\rangle$ denotano gli autostati di S_3. Agli istanti t_1, t_2, t_3, con $0 < t_1 < t_2 < t_3$ si misurano S_1, S_2 e S_3, rispettivamente. Determinare la probabilità $W^{S_1}_{t_3^+}(\pm\hbar/2)$ che una misura di S_1, fatta all'istante t_3^+, immediatamente successivo a t_3, dia come risultato $\pm\hbar/2$. Inoltre, immaginando di preparare ripetutamente il sistema con la sequenza descritta, determinare il valore medio $\langle S_1 \rangle_{t_3^+}$ e la fluttuazione $(\Delta S_1)^2_{t_3^+}$ relativi a una misura di S_1, fatta all'istante t_3^+.

$$W^{S_1}_{t_3^+}(+\hbar/2) = +1/2 \qquad W^{S_1}_{t_3^+}(-\hbar/2) = +1/2 \qquad \langle S_1 \rangle_{t_3^+} = 0 \qquad (\Delta S_1)^2_{t_3^+} = \hbar^2/4$$

Domanda 3 - Punti 4

Un sistema di cui si trascurano i gradi di libertà spaziali è caratterizzato da due momenti angolari distinti, $\vec{J}^{(1)}$ e $\vec{J}^{(2)}$, con $j^{(1)}$ e $j^{(2)}$ fissati [1]. Il momento angolare totale è $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$. Lo spazio Hilbertiano di interesse è $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$, di dimensioni $(2j^{(1)}+1)(2j^{(2)}+1)$). Indicare quali tra i seguenti insiemi di osservabili costituiscono un ICOC.

$$\{(\mathbf{J^{(1)}})^\mathbf{2}, (\mathbf{J^{(2)}})^\mathbf{2}, \mathbf{J_3^{(1)}}, \mathbf{J_3^{(2)}}\} \qquad \{(J^{(1)})^2, (J^{(2)})^2, J_3^{(1)}, J_2^{(1)}\} \qquad \{(J^{(1)})^2, (J^{(2)})^2, J^2\} \qquad \{\mathbf{J^2}, \mathbf{J_3}\}$$

Domanda 4 - Punti 4

All'istante $t = 0$, una particella di spin 1/2 in tre dimensioni è descritta dalla funzione d'onda:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = f(r)\begin{pmatrix} Y_1^{-1}(\theta,\varphi) \\ Y_1^{-1}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \quad ,$$

dove $f(r)$ è una funzione della coordinata radiale, $Y_l^m(\theta,\varphi)$ denotano le armoniche sferiche e la notazione di vettore a due componenti si riferisce alla base degli autostati di S_3: $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il momento angolare totale del sistema è $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Determinare le probabilità $W_0^{L_3}(\hbar m_l)$ $(m_l = 0, \pm 1)$ e $W_0^{S_3}(\hbar m_s)$ $(m_s = \pm 1/2)$ che misure di L_3 e S_3 fatte all'istante $t = 0$, forniscano i risultati $(0, \pm\hbar)$ e $\pm\hbar/2$, rispettivamente.

$$W_0^{L_3}(0) = 0 \qquad W_0^{L_3}(+\hbar) = 0 \qquad W_0^{L_3}(-\hbar) = 1 \qquad W_0^{S_3}(+\hbar/2) = 1/2 \qquad W_0^{S_3}(-\hbar/2) = 1/2$$

Determinare le probabilità $W_0^{J^2}(\hbar^2 j(j+1))$ e $W_0^{J_3}(\hbar m_j)$ che misure di J^2 e J_3 fatte all'istante $t = 0$, forniscano i risultati $\hbar^2 j(j+1)$ e $\hbar m_j$, rispettivamente, per tutti i valori possibili di j e m_j.

$$W_0^{J^2}(3/4\hbar^2) = 1/3 \qquad W_0^{J^2}(15/4\hbar^2) = 2/3 \qquad W_0^{J_3}(-1/2\hbar) = 1/2 \qquad W_0^{J_3}(-3/2\hbar) = 1/2$$

Suggerimento: lo stato $|j, m_j\rangle = |3/2, -1/2\rangle$ si esprime in termini della base $|m_l, m_s\rangle$ come

$$|3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|-1, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0, -1/2\rangle$$

---

[1] $\hbar^2 j^{(1)}(j^{(1)}+1)$ e $\hbar^2 j^{(2)}(j^{(2)}+1)$ sono gli autovalori di $(J^{(1)})^2$ e $(J^{(2)})^2$.