PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA

16.6.2014

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Parte 1 - ESERCIZI

1. Nello spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^4$ si considerino la grandezza fisica A e lo stato ψ descritti da

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad |\psi >= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con a numero reale. Determinare

- lo spettro di A, $\sigma(A) = \{a_i\}$; $\sigma(A) = \{+a, -a\}$
- la probabilità che una misura di A con il sistema nello stato ψ dia come risultato a_i, per ogni a_i in $\sigma(A)$;

$$W_\psi^A(+a) = 3/4 \qquad W_\psi^A(-a) = 1/4$$

- il valor medio $< A >_\psi$ e la fluttuazione $(\Delta A)_\psi$ di A nello stato ψ.

$$< A >_\psi = +a/2 \qquad (\Delta A)_\psi = \sqrt{3}a/2$$

2. Una particella è vincolata ad una regione $[0, L]$ dell'asse x e si trova in un autostato $|\varphi_n\rangle$ dell'energia. Determinare il valor medio e la fluttuazione della posizione X:

$$< X >_{\varphi_n} = L/2 \qquad (\Delta X)^2_{\varphi_n} = \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right)$$

3. Nello spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ costruire due matrici A e B rappresentative di due grandezze fisiche, tali che nessuna delle due costituisca un insieme completo di osservabili compatibili, ma che lo sia l'insieme delle due.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

4. Nell'oscillatore armonico unidimensionale con Hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2\,X^2$$

lo stato del sistema all'istante $t = 0$ è descritto dalla funzione d'onda normalizzata

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{16\pi\hbar}\right)^{1/4} (\sqrt{2}\xi - \sqrt{3}) e^{-\xi^2/2} \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

Si determinino i valori medi $\langle H\rangle_t$ e $\langle X\rangle_t$ dell'energia e della posizione al generico istante successivo t:

$$\langle H\rangle_t = \frac{3}{4}\hbar\omega \qquad \langle X\rangle_t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos\omega t$$

5. Trascurando i gradi di libertà spaziali, un sistema costituito da due particelle diverse di spin 1/2 è descritto dallo stato $|\psi\rangle = |+1/2, -1/2\rangle$ nello spazio hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$. Gli spin delle due particelle sono $\vec{S}^{(1)}$ e $\vec{S}^{(2)}$ e usiamo la notazione $|a, b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$, $(a = \pm 1/2), (b = \pm 1/2)$ con $S_z^{(1)}|a\rangle = a\hbar|a\rangle$, $S_z^{(2)}|b\rangle = b\hbar|b\rangle$. Se si esegue una misura di $\vec{S}^2 \equiv (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)})^2$, quali risultati si possono ottenere e con quali probabilità? Quale è il valor medio di $S_z \equiv (\vec{S}_z^{(1)} + \vec{S}_z^{(2)})$?

$$\sigma(S^2) = \{0, 2\hbar^2\} \qquad W^{S^2}(0) = 1/2 \qquad W^{S^2}(2\hbar^2) = 1/2$$

$$\langle S_z \rangle = 0$$