PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

17.12.2015

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Problema 1

Si considerino l'hamiltoniano H e la grandezza fisica A di un sistema quantistico associato allo spazio Hilbertiano $\mathbf{C}^3$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hbar\omega \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} a$$

con ω e a costanti reali non nulle.

1.1 All'istante $t = 0$ una misura di A da come risultato $-a$. Si determini lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema al generico istante successivo t.

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$$

1.2 Si determinino le probabilità $W^A_t(\pm a)$, il valor medio $\langle A\rangle_t$ e la fluttuazione $(\Delta A)_t$ relativi a misure di A effettuate al generico istante $t > 0$.

$$W^A_t(-a) = \cos^2\omega t \qquad W^A_t(+a) = \sin^2\omega t \qquad \langle A\rangle_t = -a\cos 2\omega t \qquad (\Delta A)_t = |a\sin 2\omega t|$$

1.3 All'istante $\bar{t}$ una misura di energia fornisce il risultato $+\hbar\omega$. Nell'istante immediatamente successivo $\bar{t}^+$ si misura A ottenendo $+a$ come risultato. Determinare la probabilità $W^H_{\bar{t}^{++}}(+\hbar\omega)$ che una nuova misura di energia, fatta all'istante $\bar{t}^{++}$, dia nuovamente come risultato $+\hbar\omega$.

$$W^H_{\bar{t}^{++}}(+\hbar\omega) = \frac{1}{2}$$

1.4 Fornire un esempio di insieme completo di osservabili compatibili che includa la grandezza fisica A.

Problema 2

Lo stato di una particella vincolata a uno spazio unidimensionale è descritto, all'istante $t = 0$, dalla funzione d'onda:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{L^2\pi}\right)^{1/4} 2\left(\frac{x}{L}\right) e^{-\dfrac{x^2}{2L^2}}$$

2.1 Determinare il valor medio $\langle X\rangle$ e la fluttuazione (ΔX) della posizione all'istante $t = 0$.

$$\langle X\rangle = 0 \qquad (\Delta X) = \sqrt{\frac{3}{2}}L$$

2.2 Determinare la probabilità $W^X_0(x > 0)$ che una misura di posizione fatta all'istante $t = 0$ fornisca un risultato positivo e la probabilità $W^{\mathcal{P}}_0(\pm 1)$ che una misura di parità fatta all'istante $t = 0$ fornisca i risultati ± 1.

$$W^X_0(x > 0) = \frac{1}{2} \qquad W^{\mathcal{P}}_0(+1) = 0 \qquad W^{\mathcal{P}}_0(-1) = 1$$

2.3 Sapendo che l'Hamiltoniano del sistema è quello di un oscillatore armonico con $L = \sqrt{\hbar/m\omega}$, determinare il valor medio dell'energia $\langle H\rangle_t$ al generico istante $t > 0$.

$$\langle H\rangle_t = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Integrali utili:

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma di Eulero con le proprietà:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad \Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$