PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA

19.2.2013

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Parte 1 - ESERCIZI

1. Una particella libera in una dimensione è descritta dall'hamiltoniano $H = P^2/2m$. Determinare lo spettro di H, $\sigma(H)$, e la molteplicità $\mu(E)$ dei valori spettrali E.

$$\sigma(H) = [0, +\infty) \qquad\qquad \mu(E) = 2$$

Considerato l'operatore di parità $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{P}\varphi)(x) = \varphi(-x)$$

scrivere l'azione di $\mathcal{P}$ sulla generica funzione d'onda $\tilde{\varphi}(p)$ in rappresentazione degli impulsi

$$(\tilde{\mathcal{P}\varphi})(p) = \tilde{\varphi}(-p)$$

Determinare il commutatore tra H e $\mathcal{P}$

$$[H, \mathcal{P}] = 0$$

Quali tra i seguenti insieme formano un insieme completo di osservabili compatibili? [sbarrare gli insieme scelti]

$$\{H, \mathcal{P}\} \qquad\qquad \{H, \mathcal{P}^5\}$$

2. Considerare l'oscillatore armonico unidimensionale con hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\, \omega^2\, X^2$$

Il moto del sistema classico corrispondente è confinato in $|x| \leq L$, dove L dipende dall'energia del sistema. Determinare L nel caso in cui l'energia classica valga $\hbar\omega/2$

$$L = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Ritornando al sistema quantistico, all'istante $t = 0$ una misura di energia fornisce il risultato $\hbar\omega/2$. Quanto vale la probabilità $W_t^X(|x| > L)$ di trovare il sistema nella regione classicamente proibita $|x| > L$ al generico istante $t \geq 0$? Si fornisca un risultato numerico.

$$W_t^X(|x| > L) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-u^2} du \approx 0.16$$

Espressioni utili: $\sqrt{\pi} \approx 1.77$ $\int_{-1}^{+1} e^{-u^2} du \approx 1.49$

3. Una particella libera in una dimensione è descritta all'istante $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\varphi_0(x) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dp\; e^{\frac{i}{\hbar} p x} e^{-\frac{|p|}{p_0}}$$

dove p_0 è una costante reale e positiva e N un fattore di normalizzazione. Determinare la probabilità $W_0^P(|p| \leq \bar{p})$ che una misura di impulso all'istante $t = 0$ fornisca un risultato p con $|p| \leq \bar{p}$, $\bar{p}$ essendo una costante reale e positiva. Rispondere allo stesso quesito nel caso in cui l'istante t sia maggiore di zero.

$$W_0^P(|p| \le \bar{p}) = (1 - e^{-\frac{2\bar{p}}{p_0}}) \qquad\qquad W_t^P(|p| \le \bar{p}) = (1 - e^{-\frac{2\bar{p}}{p_0}})$$

4. Le funzioni

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(1 - \frac{r}{2}\right) e^{-\frac{r}{2}} \qquad\qquad \psi_b = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{r}{2} e^{-\frac{r}{2}} \cos\theta$$

rappresentano due autofunzioni normalizzate dell'hamiltoniano di un atomo di idrogeno relative al numero quantico principale $n = 2$ [per comodità si è posto uguale a 1 il raggio di Bohr]. Si determini la probabilità $W_a^{X_3}(x_3 > 0)$ che una misura della coordinata X_3 con il sistema descritto da ψ_a dia un risultato positivo. Si ripeta il calcolo nel caso in cui lo stato del sistema sia descritto da ψ_b.

$$W_a^{X_3}(x_3 > 0) = \frac{1}{2} \qquad\qquad W_b^{X_3}(x_3 > 0) = \frac{1}{2}$$

Parte 2 - PROBLEMA

Nello spazio hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ tre grandezze fisiche sono descritte dalle seguenti matrici:

$$A = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \hbar \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una quarta grandezza è definita da

$$K = A^2 + B^2 + C^2$$

1. Si calcolino i commutatori tra le matrici A, B, C e K.

2. Si determinino autovalori e autovettori di C

3. L'operatore hamiltoniano di un sistema fisico è descritto da

$$H = \frac{\Omega}{\hbar} K + \omega\, C$$

dove Ω e ω sono costanti reali. All'istante $t = 0$ si misura la grandezza A trovando zero come risultato. Si determini lo stato ψ_t del sistema al generico istante $t > 0$.

4. Calcolare la probabilità $W_t^B(0)$ che una misura di B fatta all'istante $t > 0$ dia come risultato zero, il valor medio $< B >_t$ e la fluttuazione $(\Delta B)_t$ di B all'istante $t > 0$.

RISPOSTE

1.

$$[A, B] = \hbar\, C \qquad [B, C] = \hbar\, A \qquad [C, A] = \hbar\, B$$
$$[K, A] = 0 \qquad [K, B] = 0 \qquad [K, C] = 0$$

2.

$$c_0 = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_{-1} = -\hbar \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_{+1} = +\hbar \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\psi_t = \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$W_t^B(0) = \sin^2 \omega t \qquad\qquad < B >_t = 0 \qquad\qquad (\Delta B)_t = \hbar |\cos\omega t|$$