PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

20.2.2014

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Problema 1

Si consideri il sistema costituito da una particella vincolata a muoversi nella regione unidimensionale $-a/2 \leq x \leq +a/2$, tramite un potenziale nullo (infinito) all'interno (esterno) della regione. All'istante $t = 0$ il sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi_0(x) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2k-1}\ \varphi_{2k}(x) \qquad\qquad N > 1$$

dove $\varphi_n(x)$ $n = 1, 2, ...$ sono le autofunzioni normalizzate dell'hamiltoniano H, numerate nell'ordine di energie crescenti.

1.1 Determinare la norma $||\psi_0||$ della funzione d'onda

$$||\psi_0|| = N$$

1.2 Determinare la funzione d'onda normalizzata $\psi_t(x)$ che descrive il sistema all'istante generico $t > 0$, nell'ipotesi che non vengano effettuate misure sul sistema.

$$\psi_t(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2k}t} \sqrt{2k-1}\ \varphi_{2k}(x)$$

1.3 Si determinino i valori medi di X, X^3 e della parità $\mathcal{P}$ all'istante $t > 0$

$$\langle X \rangle_t = 0 \qquad\qquad \langle X^3 \rangle_t = 0 \qquad\qquad \langle \mathcal{P} \rangle_t = -1$$

1.4 All'istante $\bar{t} > 0$ si misurano in rapida successione (e nell'ordine) l'energia e la posizione della particella. La prima misura da come risultato $(\hbar^2/2m)4\pi^2/a^2$ e la seconda misura stabilisce che la particella occupa la regione $0 \leq x \leq a/2$. Determinare la funzione d'onda normalizzata che descrive il sistema subito dopo queste due misure

$$\psi_{\bar{t}^+}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1.5 Determinare la funzione d'onda $\psi_t(x)$ che descrive il sistema all'istante generico $t > \bar{t}^+$, nell'ipotesi che non vengano effettuate altre misure sul sistema.

$$\psi_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-\bar{t})} \varphi_n(x) \qquad\qquad c_n = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2}}{\pi(4-n^2)} & n \text{ dispari} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Integrali utili:

$$\int_0^{\pi/2} \cos ny\ \sin 2y\ dy = \frac{2}{4-n^2} \qquad\qquad \int_0^{\pi/2} \sin ny\ \sin 2y\ dy = \frac{\pi}{4}\delta_{n,2}$$

1.6 Determinare la probabilità che una misura di energia fatta all'istante $t > \bar{t}^+$ dia un risultato maggiore di $(\hbar^2/2m)4\pi^2/a^2$

$$W_t^H(E > \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4\pi^2}{a^2}) = \frac{1}{2} - \frac{32}{9\pi^2}$$

Problema 2

Una particella di spin uno, di cui si trascurano i gradi di libertà spaziali, è descritta nello spazio Hilbertiano $\mathbf{C}^3$ dall'hamiltoniano

$$H = \hbar\omega\left(\frac{J^+J^-}{\hbar^2} - 1\right)$$

dove J^+ e J^- sono gli operatori di innalzamento e abbassamento.

2.1 Si esprima H in termini di J^2 e J_3

$$H = \hbar\omega\left(\frac{J^2 - J_3^2 + \hbar J_3}{\hbar^2} - 1\right)$$

2.2 Detti $\{|1,m\rangle\ (m = -1,0,1)\}$ gli autostati simultanei di J^2 e J_3, si determinino autovalori e autostati di H

$$E_{-1} = -\hbar\omega \quad \leftrightarrow \quad |\varphi_{-1}\rangle = |1\,-1\rangle \qquad\qquad E_1 = \hbar\omega \quad \leftrightarrow \quad |\varphi_1\rangle = \alpha|10\rangle + \beta|11\rangle$$

2.3 Quali dei seguenti insiemi formano un insieme completo di osservabili compatibili (sbarrare gli insieme scelti)

$\{J_1\}$ $\qquad$ $\{J_2\}$ $\qquad$ $\{J_3\}$ $\qquad$ $\{H\}$ $\qquad$ $\{H, J_1\}$ $\qquad$ $\{H, J_2\}$ $\qquad$ $\{H, J_3\}$

2.4 All'istante $t = 0$ una misura di J_1 da come risultato $+\hbar$. Si determini lo stato del sistema all'istante generico $t > 0$.

$$\psi_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ \sqrt{2}e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\omega t}}{2}\left(|11\rangle + \sqrt{2}|10\rangle\right) + \frac{e^{i\omega t}}{2}|1\,-1\rangle$$

2.5 Si determinino i valori medi di $J_{1,2}$ e $J_{1,2}^2$ al generico istante $t > 0$

$$\langle J_1\rangle_t = \frac{\hbar}{2}(1 + \cos 2\omega t) \qquad \langle J_1^2\rangle_t = \frac{\hbar^2}{4}(3 + \cos 2\omega t) \qquad (\Delta J_1)_t^2 = \frac{\hbar^2}{4}(2 - \cos 2\omega t - \cos^2 2\omega t)$$

$$\langle J_1\rangle_t = \frac{\hbar}{2}(\sin 2\omega t) \qquad \langle J_1^2\rangle_t = \frac{\hbar^2}{4}(3 - \cos 2\omega t) \qquad (\Delta J_1)_t^2 = \frac{\hbar^2}{4}(2 - \cos 2\omega t + \cos^2 2\omega t)$$

2.6 Si determini la probabilità che una misura di energia all'istante $t > 0$ dia un risultato positivo.

$$W_t^H(E > 0) = \frac{3}{4}$$