PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

25.1.2018

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Problema 1

Una particella di spin 1/2 immersa in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = B(1,0,0)$, della quale si trascurano inizialmente i gradi di libertà spaziali, è descritta dall'Hamiltoniano

$$H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B} = -\omega S_1 \quad , \qquad \omega = \gamma B$$

dove la frequenza ω è una costante e S_i sono gli operatori di spin in $\mathcal{H} = C^2$.

1.1 Punti 3
Si determinino gli autovalori E_n e gli autostati $|\varphi_n\rangle$ di H nella base $\{| \pm 1/2\rangle\}$ degli autostati di S_3:

$$S_3| \pm 1/2\rangle = \pm\hbar/2| \pm 1/2\rangle \qquad | + 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad | - 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = -\frac{\hbar\omega}{2} \qquad |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = +\frac{\hbar\omega}{2} \qquad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.2 Punti 3
All'istante $t = 0$ una misura di S_3 fornisce il risultato $+\hbar/2$. Si determini lo stato del sistema $|\psi_t\rangle$ al generico istante $t > 0$, esprimendolo come un vettore colonna a due componenti nella base $\{| \pm 1/2\rangle\}$ degli autostati di S_3.

$$|\psi_t\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega}{2} t \\ i \sin \frac{\omega}{2} t \end{pmatrix}$$

1.3 Punti 4
Si determinino le probabilità $W_t^{S_2}(\pm\hbar/2)$ che una misura di S_2 fatta al generico istante $t > 0$, dia come risultato $\pm\hbar/2$, il valor medio di S_2, $\langle S_2\rangle_t$, e la fluttuazione $(\Delta S_2)_t$ all'istante $t > 0$.

$$W_t^{S_2}(+\hbar/2) = \frac{1}{2}(1+\sin \omega t) \qquad W_t^{S_2}(-\hbar/2) = \frac{1}{2}(1-\sin \omega t) \qquad \langle S_2\rangle_t = \frac{\hbar}{2} \sin \omega t \qquad (\Delta S_2)_t = \frac{\hbar}{2} |\cos \omega t|$$

1.4 Punti 4
Solo per questo punto, si riconsiderino anche i gradi di libertà spaziali della particella.
All'istante $\bar{t} = \pi/\omega$ si misurano il momento angolare orbitale L^2 e la terza componente L_3 ottenendo i risultati $2\hbar^2$ e $-\hbar$, rispettivamente. Determinare i valori possibili del momento angolare totale J^2 e della sua terza componente J_3 e le rispettive probabilità, all'istante $\bar{t}$.

Chiamando $\hbar j(j + 1)$ e $\hbar m$ gli autovalori di J^2 e di J_3, si ha:

$$j = 3/2 \qquad m = -3/2 \qquad W_{\bar{t}}^{J^2} \left(\hbar^2 j(j + 1)\right) = \delta_{j,3/2} \qquad W_{\bar{t}}^{J_3}(\hbar m) = \delta_{m,-3/2}$$

Domanda 1 - Punti 4

Un sistema costituito da una particella in una dimensione è descritto dall'Hamiltoniano $H = \frac{P^2}{2m} + \lambda X^4$, dove m è la massa e $\lambda > 0$ una costante. Si indichino quali tra questi insiemi costituiscono un ICOC (cerchiare le risposte corrette).

$$\{\mathbf{H}\} \qquad \{\mathbf{X}\} \qquad \{\mathbf{P}\} \qquad \{\mathcal{P}\} \qquad \{H, X\} \qquad \{H, P\} \qquad \{\mathbf{H}, \mathcal{P}\}$$

La grandezza $\mathcal{P}$ denota la parità.

Domanda 2 - Punti 4

Un sistema costituito da una particella in una dimensione è descritto dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) \quad , \qquad \text{con} \qquad V(x) \to \begin{cases} 0 & x \to -\infty \\ V_0 > 0 & x \to +\infty \end{cases}$$

dove V_0 è una costante. Per $E > V_0$, gli autofunzionali dell'Hamiltoniano nelle regioni asintotiche sono dati da

$$\begin{cases} \varphi^E_{-\infty}(x) = a\, e^{ikx} + b\, e^{-ikx} \\ \varphi^E_{+\infty}(x) = c\, e^{ik'x} + d\, e^{-ik'x} \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

dove $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$. Determinare i coefficienti di riflessione e trasmissione R e T in termini della variabile θ.

$$R = \tanh^2\theta \qquad\qquad T = \frac{1}{\cosh^2\theta}$$

Facoltativo - Punti 3 oppure lode se il totale è 30 : nel caso in cui $V(x) = 0$ per $x < 0$ e $V(x) = V_0$ per $x \geq 0$, si determini la variabile θ in funzione di k e k'.

$$\theta = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1 - k'/k}{1 + k'/k}\right)$$

Domanda 3 - Punti 4

Un sistema quantistico è descritto dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{\omega}{\hbar} J^2$$

dove $\vec{J} = \vec{J^1} + \vec{J^2}$ denota il momento angolare totale del sistema, con $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$. All'istante $t = 0$ si misurano le terze componenti J^1_3 e J^2_3, ottenendo come risultati $-\hbar$ e $+\hbar/2$, rispettivamente. Quali sono i risultati possibili di una misura dell'energia all'istante generico $t > 0$ e le rispettive probabilità?
Suggerimento: si sa che lo stato $|j, m\rangle = |3/2, -1/2\rangle$ si esprime in termini della base $|m_1, m_2\rangle$ come

$$|3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|-1, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0, -1/2\rangle$$

$$E_i = \{3/4\hbar\omega, 15/4\hbar\omega\} \qquad\qquad W(3/4\hbar\omega) = 2/3 \qquad\qquad W(15/4\hbar\omega) = 1/3$$

Domanda 4 - Punti 4

Lo stato di una particella priva di spin in 3D è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(x_1 + i\ x_2 + x_3)\ g(r) \qquad\qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

con $g(r)$ che soddisfa a $\int_0^{+\infty} dr\ r^4 |g(r)|^2 = 1$. Determinare i possibili risultati di una misura di L^2 e di L_3 e le rispettive probabilità.

$$W^{L^2}\left(\hbar^2 l(l+1)\right) = \delta_{l,1} \qquad\qquad W^{L_3}(0) = 1/3 \qquad\qquad W^{L_3}(+\hbar) = 2/3$$