PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

25.8.2017

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Non si possono utilizzare libri, appunti, calcolatrici - Riportare le risposte alle domande anche sul foglio di testo

Domanda 1

In un sistema quantistico associato allo spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ si considerino le due osservabili H e A descritte dalle matrici:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hbar\omega \quad , \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} a \quad , \qquad \omega, a \neq 0 \quad .$$

1.1 Si indichino quali tra i seguenti insieme costituiscono un ICOC (cerchiare le risposte corrette)

$$\{H\} \quad , \quad \{A\} \quad , \quad \{A^2\} \quad , \quad \{\mathbf{H}, \mathbf{A}\} \quad , \quad \{H, A^2\} \quad .$$

1.2 Il sistema viene preparato nello stato $|\psi\rangle = (0 \ 1 \ 0)$ mediante due misure di H e A effettuate nell'ordine e in rapida successione (quasi simultanee). Indicare i risultati di tali misure.

Per $H \to +2\hbar\omega$ Per $A \ \to -a$

1.3 E' possibile ottenere come risultati di misure di H e A in rapida successione 0 e $+a$, rispettivamente (cerchiare la risposta corretta)?

SI **NO**

Domanda 2

Un oscillatore armonico unidimensionale è descritto dall'hamiltoniano H

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \qquad [a, a^\dagger] = 1 \quad .$$

All'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + a^\dagger \right) |0\rangle$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale del sistema.

2.1 Detto $|\psi(t)\rangle$ lo stato del sistema al generico istante successivo t (non vengono effettuate misure tra 0 e t), si determinino gli istanti t_n ai quali vale $|\langle\psi(t)|\psi_0\rangle|^2 = 0$.

$$t_n = (2n+1)\frac{\pi}{\omega}$$

2.2 Si determinino il valor medio $\langle X\rangle(t)$ e il quadrato della fluttuazione $(\Delta X)^2(t)$ per una misura di posizione fatta al generico istante $t > 0$.

$$\langle X\rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos\omega t \qquad , \qquad (\Delta X)^2(t) = \frac{\hbar}{2m\omega}(1 + \sin^2\omega t) \qquad .$$

Domanda 3

La funzione d'onda dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno è

$$\psi_{100}(r,\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

dove a_0 è il raggio di Bohr.

3.1 Determinare la densità di probabilità $\rho(r)$ relativa ad una misura di posizione dell'elettrone lungo la coordinata radiale, tenendo conto che $\int_0^{+\infty} dr\rho(r) = 1$.

$$\rho(r) = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2\frac{r}{a_0}}$$

3.2 Determinare a quale distanza r_{max} dal nucleo la densità di probabilità $\rho(r)$ è massima

$$r_{max} = a_0$$

3.3 Determinare il valor medio $\langle R \rangle$ della coordinata radiale dell'elettrone

$$\langle R \rangle = \frac{3}{2} a_0$$

Integrali utili:

$$\int_0^{+\infty} du\ u^2 e^{-2u} = \frac{1}{4} \qquad \int_0^{+\infty} du\ u^3 e^{-2u} = \frac{3}{8}$$

Domanda 4

Si consideri una particella di spin 1/2 della quale si trascurino i gradi di libertà spaziali.

4.1 Quali sono i risultati possibili per una misura di $S_x + S_y$?

$$\pm \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

4.2 All'istante $t = 0$ si effettua una misura di $S_x + S_y$. Determinare la probabilità $W_{0^+}^{S_z}(-\hbar/2)$ che una misura di S_z, effettuata all'istante $t = 0^+$, dia come risultato $-\hbar/2$.

$$W_{0^+}^{S_z}(-\hbar/2) = \frac{1}{2}$$

Domanda 5

Si aggiunga all'hamiltoniano della domanda n. 2 il potenziale $\mathcal{H}_I = +\lambda X^4$ $(\lambda > 0)$.

5.1 Si determinino gli autovalori E_n del nuovo hamiltoniano al primo ordine perturbativo nella costante λ.

$$E_n = E_n^0 + \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}\lambda(2n^2 + 2n + 1)$$