PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

26.1.2017

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Domanda 1

Un sistema è costituito da una particella libera in una dimensione. Indicare un insieme completo di osservabili compatibili.

Domanda 2

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova all'istante t=0 nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |2\rangle)$$

dove $|n\rangle$ sono gli autostati dell'hamiltoniano del sistema. Determinare valori medi per misure di $\mathcal{P}$ (parità), X e X^3 fatte al generico istante $t > 0$. Qual è la fluttuazione di $\mathcal{P}$ all'istante $t > 0$?

$$\langle \mathcal{P} \rangle_t = +1 \qquad \langle X \rangle_t = 0 \qquad \langle X^3 \rangle_t = 0 \qquad (\Delta \mathcal{P})^2_t = 0 \tag{1}$$

Domanda 3

Nella composizione di due momenti angolari $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$, si sa che lo stato $|j, m\rangle = |3/2, +1/2\rangle$ si esprime in termini della base $|m_1, m_2\rangle$ come

$$|3/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0, +1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|+1, -1/2\rangle$$

Qual è la combinazione di $|m_1, m_2\rangle$ che rappresenta lo stato $|j, m\rangle = |1/2, +1/2\rangle$?

$$|1/2, +1/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}|0, +1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|+1, -1/2\rangle$$

Domanda 4

Lo stato di una particella priva di spin in 3D è descritto in coordinate polari sferiche dalla funzione d'onda

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A e^{-r/r_0} \qquad r_0 > 0$$

con A e r_0 costanti. Quali sono i valori medi e le fluttuazioni di L_i $(i = 1, 2, 3)$ con il sistema descritto da ψ?

$$\langle L_1 \rangle = 0 \qquad \langle L_2 \rangle = 0 \qquad \langle L_3 \rangle = 0 \qquad (\Delta L_1)^2 = 0 \qquad (\Delta L_2)^2 = 0 \qquad (\Delta L_3)^2 = 0$$

Domanda 5

Un atomo di idrogeno (elettrone non-relativistico e senza spin) è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = (0, 0, B)$. In quanti livelli si separa l'autovalore degenere E_2 dell'hamiltoniano H (barrare la risposta corretta)?

1 2 **3** 4

Domanda 6

Una particella di spin 1 (della quale si trascurano i gradi di libertà spaziali) si trova in uno degli stati $|1, m\rangle$, autostati simultanei di J^2 e J_3. Quali sono i possibili valori di m che minimizzano la fluttuazione $(\Delta J_1)^2$?

$$m = \pm 1$$

Problema 1

Una particella di spin 1, della quale si trascurano i gradi di libertà spaziali, è descritta dall'Hamiltoniano

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\,(J_3 - iJ_1)(J_3 + iJ_1) \quad ,$$

dove la frequenza ω è una costante e J_i sono gli operatori di spin in $\mathcal{H} = C^3$.

1.1 Esprimere H in termini di J^2 e J_2:

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\,(J^2 - J_2^2 - \hbar J_2)$$

1.2 Si determinino gli autovalori E_n e gli autostati $|\varphi_n\rangle$ di H nella base $\{|m\rangle\}$ degli autostati di J_3:

$$J_3|m\rangle = \hbar m|m\rangle \qquad |+1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = 0 \qquad |\varphi_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix} \qquad E_2 = 2\hbar\omega \qquad |\varphi_{2,1}\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} \qquad |\varphi_{2,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Si indichino quali tra questi insiemi costituiscono un ICOC (cerchiare le risposte corrette).

$$\{H\} \qquad \{J_2\} \qquad \{J^2\} \qquad \{H, J_1\} \qquad \{H, J_2\} \qquad \{H, J_3\} \qquad \{H, J^2\}$$

1.4 All'istante $t = 0$ una misura di J_3 fornisce il risultato 0. Si determini lo stato del sistema $|\psi_t\rangle$ al generico istante $t > 0$, esprimendolo come un vettore colonna a tre componenti nella base $\{|m\rangle\}$ degli autostati di J_3.

$$|\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \sqrt{2}\cos\omega t \\ -\sin\omega t \end{pmatrix}$$

1.5 Si determinino le probabilità $W_t^{J_2}(\hbar m)$ che una misura di J_2 fatta al generico istante $t > 0$, dia come risultato $\hbar m$ e il valor medio di J_2, $\langle J_2\rangle_t$, all'istante $t > 0$.

$$W_t^{J_2}(+\hbar) = \frac{1}{2} \qquad W_t^{J_2}(0) = 0 \qquad W_t^{J_2}(-\hbar) = \frac{1}{2} \qquad \langle J_2\rangle_t = 0$$

1.6 Si determini il valor medio di J_1, $\langle J_1\rangle_t$, e la fluttuazione $(\Delta J_1)_t^2$ all'istante $t > 0$.

$$\langle J_1\rangle_t = 0 \qquad (\Delta J_1)_t^2 = \hbar^2\cos\omega t$$