

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA

27.8.2014

NOME:

COGNOME:

numero di matricola:

Parte 1 - ESERCIZI

1. Nello spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^4$ si considerino la grandezza fisica A e lo stato ψ descritti da

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con a numero reale. Determinare

– lo spettro di A , $\sigma(A) = \{a_i\}$;

$$\sigma(A) = \{+a, -a\}$$

– la probabilità che una misura di A con il sistema nello stato ψ dia come risultato a_i , per ogni a_i in $\sigma(A)$;

$$W_{\psi}^A(+a) = 2/3$$

$$W_{\psi}^A(-a) = 1/3$$

– il valor medio $\langle A \rangle_{\psi}$ e la fluttuazione $(\Delta A)_{\psi}$ di A nello stato ψ .

$$\langle A \rangle_{\psi} = +a/3$$

$$(\Delta A)_{\psi} = 2\sqrt{2}a/3$$

2. Una particella è vincolata ad una regione $[-L/2, L/2]$ dell'asse x e si trova nello stato $|\varphi_1\rangle$ di energia minima. Determinare il valor medio e la fluttuazione della posizione X :

$$\langle X \rangle_{\varphi_1} = 0$$

$$(\Delta X)_{\varphi_1}^2 = \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right)$$

3. Nello spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ costruire due matrici A e B rappresentative di due grandezze fisiche, tali che nessuna delle due costituisca un insieme completo di osservabili compatibili, ma che lo sia l'insieme delle due.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

4. Nell'oscillatore armonico unidimensionale con Hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

lo stato del sistema all'istante $t = 0$ è descritto dalla funzione d'onda normalizzata

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\xi \right) e^{-\xi^2/2} \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

Si determinino i valori medi $\langle H \rangle_t$ e $\langle X \rangle_t$ dell'energia e della posizione al generico istante successivo t :

$$\langle H \rangle_t = \frac{5}{4}\hbar\omega$$

$$\langle X \rangle_t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \cos \omega t$$