PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA

29.1.2015

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Problema I

L'Hamiltoniano di un sistema quantistico costituito da una particella unidimensionale è

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\,\omega^2 X^2 - m\,\omega^2 L X$$

dove m è la massa della particella, $\omega > 0$ e L sono parametri reali con le dimensioni di una pulsazione e di una lunghezza, rispettivamente.

1. Determinare l'energia minima E_{min} del sistema classico corrispondente e la configurazione classica di equilibrio stabile x_{eq}.

$$E_{min} = -\frac{1}{2}m\,\omega^2\,L^2 \qquad\qquad x_{eq} = L$$

2. Determinare gli autovalori E_n di H e l'autofunzione $\varphi_0(x)$ relativa allo stato fondamentale E_0.

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}m\,\omega^2\,L^2 \qquad\qquad \varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

3. Determinare i valori medi $\langle X\rangle_{\varphi_0}$ e $\langle P\rangle_{\varphi_0}$ di posizione e impulso nello stato fondamentale del sistema.

$$\langle X\rangle_{\varphi_0} = L \qquad\qquad \langle P\rangle_{\varphi_0} = 0$$

Problema II

L'hamiltoniano di una particella di spin 1/2 in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = (0, B, 0)$ (cioè diretto lungo l'asse 2) è dato da:

$$H = -\gamma\vec{S}\cdot\vec{B} = \omega S_2$$

dove si è posto $\omega = -\gamma B$.

1. Determinare gli autovalori $E_{1,2}$ e gli autovettori $|E_{1,2}\rangle$ di H, utilizzando la base

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

degli autostati di S_3: $S_3|\pm\rangle = \pm\hbar/2|\pm\rangle$.

$$E_{1,2} = \pm\hbar\omega/2 \qquad |E_1\rangle = \frac{1}{2}\left[(1-i)|+\rangle + (1+i)|-\rangle\right] \qquad |E_2\rangle = \frac{1}{2}\left[(-1+i)|+\rangle + (1+i)|-\rangle\right]$$

2. All'istante $t = 0$ una misura di S_1 da come risultato $-\hbar/2$. Determinare lo stato $|\psi_t >$ del sistema al generico istante $t > 0$.

$$|\psi_t\rangle = \frac{1+i}{2}e^{-i\omega t/2}|E_1\rangle - \frac{1-i}{2}e^{-i\omega t/2}|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2}t + \sin\frac{\omega}{2}t \\ -\cos\frac{\omega}{2}t + \sin\frac{\omega}{2}t \end{pmatrix}$$

3. Calcolare la probabilità $W_t^{S_3}(\pm\hbar/2)$ che una misura di S_3, fatta all'istante $t > 0$, dia per risultato $\pm\hbar/2$. Calcolare valor medio $\langle S_3\rangle_t$ e fluttuazione $(\Delta S_3)_t$ (intorno al valor medio) di S_3 all'istante $t > 0$.

$$W_t^{S_3}(\pm\hbar/2) = \frac{1}{2}(1 \pm \sin\omega t) \qquad \langle S_3\rangle_t = \frac{\hbar}{2}\sin\omega t \qquad (\Delta S_3)_t = \frac{\hbar}{2}|\cos\omega t|$$