PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI MECCANICA QUANTISTICA

29.1.2013

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Parte 1 - ESERCIZI

1. Nello spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ si considerino la grandezza fisica C e lo stato ψ descritti da

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} c \qquad\qquad |\psi> = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con c numero reale. Determinare il valor medio $< C >_\psi$, la fluttuazione $(\Delta C)_\psi$ di C nello stato ψ:

$$< C >_\psi = c \qquad\qquad (\Delta C)_\psi = 0$$

e la probabilità che una misura di C con il sistema nello stato ψ dia come risultato 0, c, $2c$:

$$W^C_\psi(0) = 0 \qquad W^C_\psi(c) = 1 \qquad W^C_\psi(2c) = 0$$

2. All'istante $t = 0$ si misurano il momento angolare totale J e la sua terza componente J_3 di una particella in tre dimensioni e si trova, rispettivamente, $2\hbar^2$ e $+\hbar$. All'istante $t = 0^+$ immediatamente successivo una misura di J_1 da per risultato $+\hbar$. Se ora si rimisura immediatamente J_3, qual è la probabilità $W^{J_3}(+\hbar)$ di ritrovare $+\hbar$ come risultato? Quanto valgono il valor medio $< J_3 >$ e la fluttuazione (ΔJ_3) di J_3?

$$W^{J_3}(+\hbar) = 1/4 \qquad\qquad < J_3 > = 0 \qquad\qquad (\Delta J_3) = \hbar/\sqrt{2}$$

3. Nell'oscillatore armonico unidimensionale con Hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\, \omega^2\, X^2$$

lo stato del sistema all'istante $t = 0$ è descritto da

$$|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n> + |n+1>) \tag{1}$$

dove $|n>$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ denota il generico autostato di H. Si determinino valor medio e fluttuazione della parità $\mathcal{P}$ al generico istante successivo t:

$$< \mathcal{P} >_t = 0 \qquad\qquad (\Delta \mathcal{P})_t = 1$$

4. Nello spazio Hilbertiano $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$, considerare le grandezze fisiche descritte dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} a \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} b$$

con a e b numeri reali. Quali tra i seguenti insieme formano un insieme completo di osservabili compatibili? [sbarrare gli insieme scelti]

$$\{A, B\} \qquad\qquad \{A + B\}$$

Parte 2 - PROBLEMA

L'hamiltoniano di una particella di spin 1/2 in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B} = (B, 0, 0)$ (cioè diretto lungo l'asse 1) è dato da:

$$H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B} = -\omega S_1$$

dove si è posto $\omega = \gamma B$.

1. Determinare gli autovalori $E_{1,2}$ e gli autovettori $|E_{1,2} >$ di H, utilizzando la base

$$|+1/2 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-1/2 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

degli autostati di S_3: $S_3| \pm 1/2 >= \pm\hbar/2| \pm 1/2 >$.

2. All'istante $t = 0$ una misura di S_3 da come risultato $+\hbar/2$. Determinare lo stato $|\psi_t >$ del sistema al generico istante $t > 0$.

3. Calcolare la probabilità $W_t^{S_2}(\pm\hbar/2)$ che una misura di S_2, fatta all'istante $t > 0$, dia per risultato $\pm\hbar/2$. Calcolare valor medio $< S_2 >_t$ e fluttuazione $(\Delta S_2)_t$ (intorno al valor medio) di S_2 all'istante $t > 0$.

RISPOSTE

1.

$$E_{1,2} = \mp\hbar\omega/2 \qquad |E_1 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1/2 > +|-1/2 >) \qquad |E_2 >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1/2 > -|-1/2 >)$$

2.

$$|\psi_t >= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+i\omega t/2}|E_1 > +e^{-i\omega t/2}|E_2 >)$$

3.

$$W_t^{S_2}(\pm\hbar/2) = \frac{1}{2}(1 \pm \sin\omega t) \qquad < S_2 >_t = \frac{\hbar}{2}\sin\omega t \qquad (\Delta S_2)_t = \frac{\hbar}{2}|\cos\omega t|$$