PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
MECCANICA QUANTISTICA

9.7.2018

NOME: COGNOME:
numero di matricola:

Problema 1

Un sistema unidimensionale costituito da particella libera è descritto all'istante $t = 0$ dalla funzione d'onda:

$$\psi(x) = \sqrt{\alpha}\; e^{\alpha|x|}\; e^{ikx}$$

con $\alpha > 0$ e k reale.

1.1 Punti 2
Determinare il valor medio $\langle X\rangle_{t=0}$ di una misura di posizione fatta all'istante $t = 0$.

$$\langle X\rangle_{t=0} = 0$$

1.2 Punti 3
Determinare l'azione dell'operatore impulso sulla funzione d'onda $\psi(x)$:

$$\psi_p(x) \equiv (P\psi)(x) = \hbar[k + i\alpha\; \mathtt{sign}(x)]\psi(x)$$

L'affermazione "$\psi_p(x)$ *è autofunzione di* P" è

`vera` **falsa**

1.3 Punti 2
Determinare i valori medi $\langle P\rangle_{t\geq 0}$ e $\langle P^2\rangle_{t\geq 0}$ per misure di impulso fatte al generico istante $t \geq 0$.

$$\langle P\rangle_{t\geq 0} = \hbar\; k \qquad\qquad \langle P^2\rangle_{t\geq 0} = \hbar^2(k^2 + \alpha^2)$$

1.4 Punti 3
Determinare il valor medio $\langle X^2\rangle_{t=0}$ e verificare il principio di indeterminazione di Heisemberg all'istante $t = 0$.

$$\langle X^2\rangle_{t=0} = \frac{1}{2\alpha^2} \qquad\qquad (\Delta X)^2_{t=0}(\Delta P)^2_{t=0} = \frac{\hbar^2}{2} > \frac{\hbar^2}{4}$$

Problema 2

Un sistema costituito da due particelle diverse di spin 1/2, di cui si trascurano i gradi di libertà spaziali, è descritto dall'operatore Hamiltoniano:

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\left[(S^{(1)})^2 + \sum_i S_i^{(1)}S_i^{(2)} + (S^{(2)})^2\right]$$

2.1 Punti 4
Lavorando nella base $|j, m\rangle$ degli autostati di $J^2 = (S^{(1)} + S^{(2)})^2$ e $J_3 = S_3^{(1)} + S_3^{(2)}$, si determinino gli autovalori E_n di H, la loro degenerazione d_n e i relativi autostati $|\varphi_n\rangle$:

$$E_0 = \frac{3}{4}\hbar\omega\; (d_0 = 0) \qquad\qquad E_1 = \frac{7}{4}\hbar\omega\; (d_1 = 3)$$

$$|\varphi_0\rangle = |0, 0\rangle \qquad\qquad |\varphi_1\rangle = |1, m\rangle \quad (m = 0, \pm 1)$$

2.2 Punti 3
All'istante $t = 0$ si misurano, nell'ordine, $S_3^{(1)}$ e $S_3^{(2)}$, ottenendo i risultati $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, rispettivamente. Determinare i valori medi $\langle J_3\rangle_t$, $\langle J^2\rangle_t$ e le fluttuazioni $(\Delta J_3)_t$, $(\Delta J^2)_t$ per misure di J_3 e J^2 fatte al generico istante $t \geq 0$.

$$\langle J_3\rangle_t = 0 \qquad \langle J^2\rangle_t = \hbar^2 \qquad (\Delta J_3)_t = 0 \qquad (\Delta J^2)_t = \hbar^2$$

Problema 3

Per un oscillatore armonico unidimensionale si consideri l'operatore

$$\Omega \equiv -e^{i\pi a a^\dagger}$$

dove a e $a^\dagger$ sono gli operatori di creazione e distruzione, rispettivamente.

3.1 Punti 2
Determinare l'azione di Ω sugli autostati $|\varphi_n\rangle$ dell'Hamiltoniano H del sistema.

$$\Omega|\varphi_n\rangle = \begin{cases} +|\varphi_n\rangle & n \text{ pari} \\ -|\varphi_n\rangle & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Determinare gli autovalori ω_i e gli autostati $|\omega_i\rangle$ di Ω.

$$\omega_i = \{+1, -1\} \qquad\qquad |\omega_i\rangle = \begin{cases} |\varphi_n\rangle & n \text{ pari } \omega_i = +1 \\ |\varphi_n\rangle & n \text{ dispari } \omega_i = -1 \end{cases}$$

Questo mostra che l'operatore Ω coincide con quello di parità.

3.2 Punti 4
Determinare l'azione di Ω sugli operatori di creazione e distruzione e sugli operatori posizione e impulso:

$$a' = \Omega\, a\Omega^\dagger = -a \qquad a^{\dagger\prime} = \Omega a^\dagger \Omega^\dagger = -a^\dagger \qquad X' = \Omega X \Omega^\dagger = -X \qquad P' = \Omega P \Omega^\dagger = -P$$

3.3 Punti 3
All'istante $t = 0$ il sistema viene preparato nello stato

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_0\rangle + |\varphi_1\rangle)$$

Determinare il valor medio $\langle\Omega\rangle_t$ e la fluttuazione $(\Delta\Omega)_t$ di una misura di Ω fatta al generico istante $t \geq 0$.

$$\langle\Omega\rangle_t = 0 \qquad\qquad (\Delta\Omega)_t = 1$$

Domanda - Punti 4

Un sistema è costituito da due particelle diverse di spin 1/2, di cui si trascurano i gradi di libertà spaziali. Indicando con $S_i^{(1)}$ e $S_j^{(2)}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ gli operatori che descrivono i rispettivi spin, si indichino quali tra i seguenti insiemi formano un ICOC. (Cerchiare le risposte)

$$\{(S^{(1)})^2, S_3^{(2)}\} \qquad \{\mathbf{S_3^{(1)}}, \mathbf{S_3^{(2)}}\} \qquad \{\mathbf{S_2^{(1)}}, \mathbf{S_1^{(2)}}\}$$

$$\{(S^{(1)})^2, S_3^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(2)}\} \qquad \{S_2^{(1)}, S_1^{(1)}\} \qquad \{(S^{(1)})^2, (S^{(2)})^2, \}$$