Operatori lineari in spazi di Hilbert

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica, a.a. 2004/2005

1 Lo spazio di Hilbert

Sia H uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbf{K}$, che si supporrà essere il corpo dei numeri reali $\mathbf{R}$ o quello dei numeri complessi $\mathbf{C}$. È definito un prodotto scalare $H \times H \to \mathbf{K}$ che indicheremo con $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Esso è tale che, per ogni $f, g, h \in H$ e $\alpha \in \mathbf{K}$, sono verificate le seguenti proprietà:

$$
\begin{aligned}
&a)\ \langle f|f\rangle \geq 0\,;\\
&b)\ \langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0\,;\\
&c)\ \langle f+g|h\rangle = \langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle\,;\\
&d)\ \langle \alpha f|g\rangle = \alpha\langle f|g\rangle\,;\\
&e)\ \langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^*\,,
\end{aligned}
$$

dove z^* indica il complesso coniugato di z ($z^* = z$ se $z \in \mathbf{R}$). Si noti che

$$\langle f|\alpha g\rangle = \alpha^*\langle f|g\rangle\,.$$

Poniamo, per ogni $f \in H$,

$$\|f\| = \langle f|f\rangle^{1/2}\,.$$

Teorema. *Per ogni $f, g \in H$, si ha:*

$$|\langle f|g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|\,.$$

*(**disuguaglianza di Schwarz**).*

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se $g = 0$, essendo in tal caso $\langle f|g\rangle = 0$ e $\|g\| = 0$. Supponiamo quindi $g \neq 0$. Per ogni $\alpha \in \mathbf{K}$, si ha

$$0 \leq \|f - \alpha g\|^2 = \langle f - \alpha g | f - \alpha g\rangle = \|f\|^2 - \alpha^* \langle f|g\rangle - \alpha\langle g|f\rangle + |\alpha|^2 \|g\|^2 .$$

Prendendo $\alpha = \frac{\langle f|g\rangle}{\|g\|^2}$, si ottiene

$$0 \leq \|f\|^2 - 2\frac{|\langle f|g\rangle|^2}{\|g\|^2} + \frac{|\langle f|g\rangle|^2}{\|g\|^4}\|g\|^2 = \|f\|^2 - \frac{|\langle f|g\rangle|^2}{\|g\|^2} ,$$

da cui la tesi. ■

Si ha che $\|\cdot\|$ è una norma su H:

$$\begin{aligned}
&a)\ \|f\| \geq 0 ;\\
&b)\ \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 ;\\
&c)\ \|\alpha f\| = |\alpha|\ \|f\| ;\\
&d)\ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| .
\end{aligned}$$

Dimostriamo quest'ultima:

$$\begin{aligned}
\|f + g\|^2 &= \langle f + g | f + g\rangle\\
&= \langle f|f\rangle + \langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle + \langle g|g\rangle\\
&= \|f\|^2 + 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2\\
&\leq \|f\|^2 + 2|\langle f|g\rangle| + \|g\|^2\\
&\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\ \|g\| + \|g\|^2\\
&= (\|f\| + \|g\|)^2 .
\end{aligned}$$

Poniamo, per $f, g \in H$,

$$d(f, g) = \|f - g\| .$$

Si ha che $d(\cdot, \cdot)$ è una distanza che rende H uno spazio metrico:

$$\begin{aligned}
&a)\ d(f, g) \geq 0 ;\\
&b)\ d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g ;\\
&c)\ d(f, g) = d(g, f) ;\\
&d)\ d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h) .
\end{aligned}$$

Diremo che H è uno spazio di Hilbert se, rispetto a tale distanza, H è completo. Nel seguito, H indicherà sempre uno spazio di Hilbert.

2 Alcuni esempi di spazi di Hilbert

Illustriamo tre esempi importanti di spazi di Hilbert, che verranno ripresi anche in seguito.

1) Consideriamo l'insieme $\mathbf{K}^N$, con la seguente operazione: se $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_N)$ sono due suoi elementi,

$$\langle \boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k^* .$$

Si verificano facilmente le proprietà del prodotto scalare.

Notiamo che, se $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, abbiamo il prodotto scalare usuale, che genera la norma e la distanza euclidea. Sappiamo che in questo caso $\mathbf{R}^N$ è uno spazio metrico completo, quindi uno spazio di Hilbert.

Nel caso in cui $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, scrivendo ogni α_k nella forma $\alpha_k = a_k + ib_k$, la norma associata al prodotto scalare sopra definito è

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{N} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right)^{1/2} .$$

Si può pertanto identificare $\mathbf{C}^N$ con $\mathbf{R}^{2N}$, per cui anche in questo caso abbiamo a che fare con uno spazio di Hilbert.

Si noti che, nel caso $N = 1$, il prodotto scalare è dato da $\langle \alpha | \beta \rangle = \alpha \beta^*$.

2) Consideriamo l'insieme ℓ^2, costituito dalle successioni $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ in $\mathbf{K}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty .$$

Si può verificare che, per $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k \geq 1}$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_k)_{k \geq 1}$, ha senso porre

$$\langle \boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k^* ,$$

e che sono soddisfatte le proprietà del prodotto scalare. Si può inoltre dimostrare che ℓ^2, con tale prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert.

3) Sia Ω un intervallo di $\mathbf{R}$ o, più in generale, un dominio in $\mathbf{R}^N$ e consideriamo l'insieme $L^2(\Omega, \mathbf{K})$, costituito dalle funzioni $f : \Omega \to \mathbf{K}$, integrabili secondo Lebesgue, tali che anche $|f|^2$ sia integrabile. Si può verificare che, per $f, g \in L^2(\Omega, \mathbf{K})$, ha senso porre

$$\langle f|g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)^*\,dx\,.$$

(In alcune applicazioni, potrebbe risultare utile moltiplicare l'integrale per un'opportuna costante.) Le proprietà del prodotto scalare sono di facile verifica, purché si convenga di identificare due funzioni qualora coincidano quasi ovunque. Si può inoltre dimostrare che $L^2(\Omega, \mathbf{K})$, con tale prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert.

Osserviamo che l'uso dell'integrale di Lebesgue è qui fondamentale. Se ad esempio considerassimo solamente funzioni integrabili secondo Riemann, non si avrebbe la completezza dello spazio.

3 Alcune proprietà fondamentali

Si può verificare la seguente disuguaglianza:

$$\Big|\|f\| - \|g\|\Big| \le \|f - g\|\,.$$

Ne segue che la norma è una funzione continua. Dalla disuguaglianza di Schwarz segue inoltre che il prodotto scalare è continuo nelle singole componenti. Se $(f_n)_n$ è una successione in H tale che $\lim_n f_n = f$, potremo quindi scrivere

$$\|f\| = \lim_n \|f_n\|\,, \qquad \langle f|g\rangle = \lim_n \langle f_n|g\rangle\,;$$

se inoltre la serie $\sum_{k=1}^\infty f_k$ converge, avremo

$$\left\langle \sum_{k=1}^\infty f_k \middle| g \right\rangle = \left\langle \lim_n \sum_{k=1}^n f_k \middle| g \right\rangle = \lim_n \left\langle \sum_{k=1}^n f_k \middle| g \right\rangle = \lim_n \sum_{k=1}^n \langle f_k|g\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle f_k|g\rangle\,.$$

Teorema. *Per ogni $f, g \in H$, si ha*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2\,.$$

*(***identità del parallelogramma***).*

Dimostrazione. Essendo

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2\,,\\ \|f-g\|^2 &= \|f\|^2 - 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2\,,\end{aligned}$$

sommando le due si ottiene l'identità cercata. ∎

Qualora, per $f, g \in H$, si abbia $\langle f, g\rangle = 0$, diremo che f e g sono tra loro "ortogonali". Più in generale, diremo che una famiglia $(f_k)_k$ in H (finita o infinita) è "ortogonale" se $\langle f_j, f_k\rangle = 0$ per ogni $j \neq k$.

Teorema di Pitagora. *Enunciamo tre situazioni, in ordine di generalità crescente.*
I) Se f e g sono ortogonali, allora

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2\,.$$

II) Se $(f_1, f_2, ..., f_n)$ è una famiglia ortogonale, allora

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2\,.$$

III) Sia $(f_k)_k$ una successione di vettori a due a due ortogonali. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 \text{ converge}\;;$$

in tal caso, si ha:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2\,.$$

Dimostrazione. I) Essendo $\langle f|g\rangle = 0$, si ha:

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2\,.$$

II) Si procede per induzione, usando I):

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2 + ... + f_{n+1}\|^2 &= \|(f_1 + f_2 + ... + f_n) + f_{n+1}\|^2\\ &= \|f_1 + f_2 + ... + f_n\|^2 + \|f_{n+1}\|^2\\ &= (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + ... + \|f_n\|^2) + \|f_{n+1}\|^2\,.\end{aligned}$$

III) Usando II), per ogni m, n si ha

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} f_k \right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|f_k\|^2 .$$

Essendo H completo, si può applicare il criterio di Cauchy per stabilire che, se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$ converge, allora converge anche $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, e viceversa. Supponiamo ora che le due serie convergano. Allora, per la continuità della norma,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 .$$

■

Si noti che in una famiglia ortogonale potrebbero esserci degli elementi nulli. Diremo che la famiglia ortogonale $(f_k)_k$ è "ortonormale" se $\|f_k\| = 1$ per ogni k. Diremo che una famiglia di elementi è "linearmente indipendente" se lo è ogni sua sottofamiglia finita.

Teorema. *Se $(f_k)_k$ è una famiglia ortonormale, allora è linearmente indipendente.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che sia

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0 .$$

Allora

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \middle| f_j \right\rangle = \alpha_j ,$$

per cui $\alpha_j = 0$ per ogni j. ■

Teorema. *Sia $(e_1, e_2, ..., e_n)$ una famiglia ortonormale. Allora, per ogni f, si ha*

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle f|e_k\rangle|^2$$

*(**disuguaglianza di Bessel**).*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $g = f - \sum_{k=1}^{n} \langle f|e_k\rangle e_k$; allora

$$\langle g|e_j\rangle = \left\langle f - \sum_{k=1}^{n} \langle f|e_k\rangle e_k \middle| e_j \right\rangle = \langle f|e_j\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle f|e_k\rangle\langle e_k|e_j\rangle = 0 .$$

Ne segue che la famiglia $(g, \langle f|e_1\rangle e_1, ..., \langle f|e_n\rangle e_n)$ è ortogonale e, per il teorema di Pitagora, essendo $f = g + \sum_{k=1}^n \langle f|e_k\rangle e_k$, si ha

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{k=1}^n \|\langle f|e_k\rangle e_k\|^2 = \|g\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle f|e_k\rangle|^2 \geq \sum_{k=1}^n |\langle f|e_k\rangle|^2 \,.$$

■

4 Sottospazi

Un sottoinsieme $\mathcal{M}$ di H si dice "varietà lineare" se, comunque presi $f, g \in \mathcal{M}$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, si ha che $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}$. Non è detto in generale che una varietà lineare sia uno spazio di Hilbert, in quanto la completezza si mantiene solamente se $\mathcal{M}$ è un insieme chiuso (ricordiamo che un insieme è chiuso se e solo se contiene il limite di ogni sua successione convergente). Diremo quindi che $\mathcal{M}$ è un "sottospazio" di H se è una varietà lineare chiusa.

Un esempio di varietà lineare che non sia un sottospazio è, in $L^2([a,b], \mathbf{K})$, l'insieme $\mathcal{C}([a,b], \mathbf{K})$ delle funzioni continue. In effetti, si può dimostrare che la sua chiusura è tutto $L^2([a,b], \mathbf{K})$.

Teorema. *Se $\mathcal{M}$ è una varietà lineare, la sua chiusura $\bar{\mathcal{M}}$ è ancora una varietà lineare, e pertanto è un sottospazio.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in \bar{\mathcal{M}}$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Esistono due successioni $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ tali che $f_n, g_n \in \mathcal{M}$ per ogni n e $\lim_n f_n = f$, $\lim_n g_n = g$. Allora $\alpha f_n + \beta g_n \in \mathcal{M}$, e $\lim_n(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha f + \beta g$, per cui $\alpha f + \beta g \in \bar{\mathcal{M}}$. ■

Teorema. *Se $(\mathcal{M}_k)_k$ è una famiglia (anche non numerabile) di sottospazi, allora la loro intersezione è ancora un sottospazio.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che l'intersezione di varietà lineari è una varietà lineare, e l'intersezione di insiemi chiusi è un insieme chiuso. ■

Teorema. *Dato un insieme $U \subseteq H$, esiste un unico sottospazio $\mathcal{M}$ tale che*
a) $\mathcal{M}$ contiene U ,
b) se $\mathcal{M}'$ è un sottospazio che contiene U, allora $\mathcal{M}'$ contiene $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Si definisce $\mathcal{M}$ come intersezione di tutti i sottospazi contenenti l'insieme U. Si ha che $\mathcal{M}$ è un sottospazio e si verificano immediatamente a) e b). ■

L'insieme $\mathcal{M}$, la cui esistenza è stabilita nel teorema precedente, è il più piccolo sottospazio che contiene U; si dice che $\mathcal{M}$ è il "sottospazio generato" da U.

Dati due sottospazi $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, l'insieme

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \{f + g : f \in \mathcal{M}_1, g \in \mathcal{M}_2\} .$$

è una varietà lineare, ma non sempre è un sottospazio. Confrontiamolo con il sottospazio generato dall'unione $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, che indichiamo con $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$.

Teorema. *Si ha:*

$$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = \overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} .$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}_1$ che $\mathcal{M}_2$ sono contenuti in $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$. Essendo quet'ultimo una varietà lineare, anche $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è contenuto in esso; essendo inoltre chiuso, avremo $\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} \subseteq \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$.

Viceversa, sia $\mathcal{M}_1$ che $\mathcal{M}_2$ sono contenuti in $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. Quindi anche la loro unione lo è. Ma $\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}$ è un sottospazio, quindi deve contenere $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$. ■

Se $(\mathcal{M}_k)_k$ è una successione di sottospazi, si definisce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$$

come l'insieme degli elementi ottenuti come somma di una serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$. Si verifica che è una varietà lineare. Come nel caso di una somma di due sottospazi, lo confrontiamo con il sottospazio generato dall'unione degli $\mathcal{M}_k$, che indicheremo con $\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$.

Teorema. *Si ha:*

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k} .$$

Dimostrazione. Tutti gli $\mathcal{M}_k$ sono contenuti in $\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Essendo quest'ultimo un sottospazio, contiene anche gli elementi ottenuti come somma di una serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$, quindi contiene $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$; essendo inoltre chiuso, avremo $\overline{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k} \subseteq \bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$.

Viceversa, tutti gli $\mathcal{M}_k$ sono contenuti in $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Quindi anche la loro unione lo è. Ma $\overline{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k}$ è un sottospazio, quindi deve contenere $\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. ■

5 Sottospazi ortogonali

Diremo che due insiemi U e V sono ortogonali se

$$\forall f \in U \quad \forall g \in V \quad \langle f|g\rangle = 0\,.$$

Indicheremo con $U^\perp$ l'insieme dei vettori di H che risultano ortogonali ad ogni vettore di U.

Teorema. *$U^\perp$ è un sottospazio di H. Inoltre, $\bar{U}^\perp = U^\perp$.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in U^\perp$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Allora, per ogni $u \in U$, si ha

$$\langle \alpha f + \beta g|u\rangle = \alpha\langle f|u\rangle + \beta\langle g|u\rangle = 0\,,$$

per cui $\alpha f + \beta g \in U^\perp$. Quindi $U^\perp$ è una varietà lineare. Vediamo che è un insieme chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in $U^\perp$ tale che $\lim_n f_n = f$. Allora, per ogni $u \in U$,

$$\langle f|u\rangle = \lim_n \langle f_n|u\rangle = 0\,,$$

per cui $f \in U^\perp$. Quindi $U^\perp$ è un sottospazio.

Siccome $U \subseteq \bar{U}$, si ha che $\bar{U}^\perp \subseteq U^\perp$. D'altra parte, se $f \in U^\perp$ e $g \in \bar{U}$, allora esiste una successione $(g_n)_n$ in U tale che $\lim_n g_n = g$; quindi

$$\langle f|g\rangle = \lim_n \langle f|g_n\rangle = 0\,;$$

ne segue che $f \in \bar{U}^\perp$, da cui $U^\perp \subseteq \bar{U}^\perp$. ■

Teorema. *Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ sono due sottospazi ortogonali, allora*

$$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2\,.$$

Inoltre, $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, ossia ogni $f \in \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ si può scrivere in un unico modo come $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in \mathcal{M}_1$ e $f_2 \in \mathcal{M}_2$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che l'insieme $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in esso tale che $\lim_n f_n = f$. Possiamo scrivere $f_n = f_{n,1} + f_{n,2}$, con $f_{n,1} \in \mathcal{M}_1$ e $f_{n,2} \in \mathcal{M}_2$. Per Pitagora,

$$\|f_m - f_n\|^2 = \|f_{m,1} - f_{n,1}\|^2 + \|f_{m,2} - f_{n,2}\|^2\,,$$

e siccome $(f_n)_n$ è di Cauchy, lo sono di conseguenza anche $(f_{n,1})_n$ e $(f_{n,2})_n$. Quindi esistono i limiti $\lim_n f_{n,1} = \bar{f}_1$ e $\lim_n f_{n,2} = \bar{f}_2$, ed essendo $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ chiusi, si ha che $\bar{f}_1 \in \mathcal{M}_1$ e $\bar{f}_2 \in \mathcal{M}_2$. Ne segue che $f = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \in \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. Questo dimostra che $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è chiuso.

Supponiamo che si possa scrivere $f = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, con $\bar{f}_1, \tilde{f}_1 \in \mathcal{M}_1$ e $\bar{f}_2, \tilde{f}_2 \in \mathcal{M}_1$. Per Pitagora, si ha

$$\|\bar{f}_1 - \tilde{f}_1\|^2 + \|\bar{f}_2 - \tilde{f}_2\|^2 = \|\bar{f}_1 - \tilde{f}_1 + \bar{f}_2 - \tilde{f}_2\|^2 = 0\,,$$

per cui $\bar{f}_1 = \tilde{f}_1$ e $\bar{f}_2 = \tilde{f}_2$. ■

Teorema. *Se $(\mathcal{M}_k)_k$ sono sottospazi a due a due ortogonali, si ha*

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\,.$$

Inoltre, $\sum_{k=1}^\infty \mathcal{M}_k = \oplus_{k=1}^\infty \mathcal{M}_k$, ossia ogni $f \in \sum_{k=1}^\infty \mathcal{M}_k$ si può scrivere in un unico modo come $f = \sum_{k=1}^\infty f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$.

<u>Dimostrazione</u>. Dobbiamo dimostrare che l'insieme $\sum_{k=1}^\infty \mathcal{M}_k$ è chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in esso tale che $\lim_n f_n = f$. Possiamo scrivere $f_n = \sum_{k=1}^\infty f_{n,k}$, con $f_{n,k} \in \mathcal{M}_k$. Per Pitagora,

$$\|f_m - f_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{m,k} - f_{n,k}\|^2\,,$$

e siccome $(f_n)_n$ è di Cauchy, lo sono di conseguenza anche le $(f_{n,k})_n$. Quindi esistono i limiti $\lim_n f_{n,k} = \bar{f}_k$, ed essendo gli $\mathcal{M}_k$ chiusi, si ha che $\bar{f}_k \in \mathcal{M}_k$.

Vogliamo ora vedere che $f = \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Da quanto sopra, esiste un $\bar{n} \geq 1$ tale che

$$m, n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{m,k} - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2\,,$$

ossia $\sum_{k=1}^N \|f_{m,k} - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2$ per ogni $N \geq 1$. Passando al limite per $m \to \infty$ si ha $\sum_{k=1}^N \|\bar{f}_k - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2$ per ogni $N \geq 1$, per cui anche $\sum_{k=1}^\infty \|\bar{f}_k - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2$. Per Pitagora, $\sum_{k=1}^\infty (\bar{f}_k - f_{n,k})$ converge e abbiamo che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - f_{n,k}) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}_k - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2\,.$$

Quindi converge anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - f_{n,k}) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k}$$

e da quanto sopra si ha che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k - f_n \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - f_{n,k}) \right\| \leq \varepsilon \,,$$

il che dimostra che $\lim_n f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k$, ossia $f = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k$. Abbiamo quindi che $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ è chiuso.

Sia ora $f = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k$, con $\bar{f}_k, \tilde{f}_k \in \mathcal{M}_k$; allora, per Pitagora,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}_k - \tilde{f}_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - \tilde{f}_k) \right\|^2 = 0 \,,$$

per cui $\bar{f}_k = \tilde{f}_k$ per ogni k. ■

Teorema. *Dato un sottospazio $\mathcal{M}$, e $f \in H$, esiste uno ed un solo $\bar{f} \in \mathcal{M}$ tale che $\|f - \bar{f}\| = d(f, \mathcal{M})$. Inoltre, $f - \bar{f} \in \mathcal{M}^{\perp}$.*

Dimostrazione. Sia (f_n) una successione in $\mathcal{M}$ tale che $\lim_n \|f - f_n\| = d(f, \mathcal{M})$. Applicando l'identità del parallelogramma a $(f - f_n)$ e $(f - f_m)$, si ha

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq 2\|f_n - f\|^2 + 2\|f_m - f\|^2 - 4d(f, \mathcal{M})^2 \,.$$

Ne segue che (f_n) è una successione di Cauchy, e quindi converge verso un certo $\bar{f} \in \mathcal{M}$. Chiaramente, si ha $\|f - \bar{f}\| = d(f, \mathcal{M})$. Inoltre, $\bar{f}$ è l'unico ad avere questa proprietà, perchè se $\tilde{f}$ è tale che $\|f - \tilde{f}\| = d(f, \mathcal{M})$, applicando l'identità del parallelogramma a $(f - \bar{f})$ e $(f - \tilde{f})$ si vede che

$$\|\bar{f} - \tilde{f}\|^2 = 4d(f, \mathcal{M})^2 - 4 \left\| f - \frac{1}{2}(\bar{f} + \tilde{f}) \right\|^2 \leq 0 \,,$$

e perciò $\bar{f} = \tilde{f}$. Infine, se per assurdo ci fosse un $g \in \mathcal{M}$ tale che $\langle f - \bar{f} | g \rangle \neq 0$, allora, posto $g' = \bar{f} + \frac{\langle f - \bar{f}, g \rangle}{\|g\|^2} g \in \mathcal{M}$, con semplici passaggi si ottiene

$$\|f - g'\|^2 = \|f - \bar{f}\|^2 - \left(\frac{|\langle f - \bar{f} | g \rangle|}{\|g\|} \right)^2 < d(f, \mathcal{M})^2 \,,$$

una contraddizione. ■

L'applicazione che a f associa $\bar{f}$ si dice "proiezione ortogonale" su $\mathcal{M}$, e si indica con $P_{\mathcal{M}}$:

$$\bar{f} = P_{\mathcal{M}} f \,.$$

Corollario 1. *Sia $\mathcal{M}$ una varietà lineare in H. Allora*

$$\bar{\mathcal{M}} = H \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^{\perp} = \{0\} \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Se $\bar{\mathcal{M}} = H$, allora $\mathcal{M}^{\perp} = \bar{\mathcal{M}}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$. D'altra parte, se $\bar{\mathcal{M}} \neq H$, esiste un $f \in H$ che non appartiene al sottospazio $\bar{\mathcal{M}}$. Per il teorema precedente, $f - P_{\bar{\mathcal{M}}} f$ è non nullo e appartiene a $\bar{\mathcal{M}}^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}$. ■

Corollario 2. *Se $\mathcal{M}$ è un sottospazio di H, si ha che $H = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$: ogni elemento $f \in H$ si può scrivere in un unico modo come $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in \mathcal{M}$ e $f_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$.*

<u>Dimostrazione</u>. Per ogni $f \in H$, si scrive

$$f = P_{\mathcal{M}} f + (f - P_{\mathcal{M}} f) \,,$$

per cui $H = \mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp}$. Inoltre, essendo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^{\perp}$ ortogonali, si ha $\mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$. ■

6 Basi di uno spazio di Hilbert

Una famiglia ortonormale $(e_k)_k$ è una "base" per lo spazio di Hilbert H se, preso $f \in H$, si ha

$$\forall k \ \langle f | e_k \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \,.$$

Diremo che H è "separabile" se esiste una sua base finita o numerabile. Supponendo noto il caso della base finita, tratteremo ora il caso di una base infinita.

Teorema. *Sia $(e_k)_{k \geq 1}$ una successione ortonormale in H. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $(e_k)_{k \geq 1}$ è una base di H;
b) $H = \bigvee_{k=1}^{\infty} \{e_k\}$;
c) per ogni $f \in H$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f | e_k \rangle e_k$ (**serie di Fourier**)*;*

d) per ogni $f, g \in H$, $\langle f|g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f|e_k\rangle\langle g|e_k\rangle^*$;
e) per ogni $f \in H$, $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2$ (**identità di Parseval**).

Dimostrazione. $a) \Rightarrow b)$ Per assurdo, sia $\bigvee_{k=1}^{\infty}\{e_k\}$ un sottospazio proprio di H. Allora esiste un $f \neq 0$ ad esso ortogonale, per cui $\langle f|e_k\rangle = 0$ per ogni k, in contraddizione col fatto che $(e_k)_k$ è una base.

$b) \Rightarrow c)$ Consideriamo i sottospazi $\mathcal{M}_k = \{\alpha e_k : \alpha \in \mathbf{K}\}$, a due a due ortogonali. Essendo

$$H = \bigvee_{k=1}^{\infty} \{e_k\} = \bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \,,$$

per $f \in H$ si ha che $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$. Allora $f_k = \alpha_k e_k$ e

$$\langle f|e_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \middle| e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \alpha_k e_k|e_j\rangle = \alpha_j \,,$$

per ogni j, da cui la formula cercata.

$c) \Rightarrow d)$ Presi $f, g \in H$, abbiamo

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f|e_k\rangle e_k \,, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g|e_k\rangle e_k \,,$$

per cui

$$\langle f|g\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f|e_k\rangle e_k \middle| g \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\langle \langle f|e_k\rangle e_k \Big| g \Big\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f|e_k\rangle\langle e_k|g\rangle \,.$$

$d) \Rightarrow e)$ È sufficiente prendere $f = g$.

$e) \Rightarrow a)$ Sia $f \in H$ tale che, per ogni k, $\langle f|e_k\rangle = 0$. Allora $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2 = 0$, per cui $f = 0$. ■

Esempi. 1) Per quanto riguarda lo spazio di Hilbert $\mathbf{K}^N$, possiamo facilmente verificare che una base è data dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0) \,, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0) \,, \quad ... \quad , \quad \mathbf{e}_N = (0, 0, 0, ..., 1) \,.$$

In questo spazio, tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi, cioè N, e questo numero viene chiamato "dimensione" dello spazio. Ogni $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ in $\mathbf{K}^N$ si può scrivere come

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{e}_k \,,$$

che risulta pertanto l'analoga della serie di Fourier.

2) Nello spazio di Hilbert ℓ^2, una base è costituita dalle seguenti successioni:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0,...)\,, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0,...)\,, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0,...)\,, \quad ...$$

Per ogni $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k \geq 1}$, la serie di Fourier si può scrivere come

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{e}_k \,.$$

3) In $L^2([a,b], \mathbf{K})$, consideriamo il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t)^* \, dt \,.$$

Una base è allora data da $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$, dove $e_k : [a,b] \to \mathbf{K}$ è la funzione così definita:

$$e_k(t) = \exp\left(\frac{2\pi k i}{b-a}\, t\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{b-a}\, t\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{b-a}\, t\right) \,,$$

per ogni $k \in \mathbf{Z}$. La serie di Fourier si scrive come

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e_k \,,$$

dove

$$\hat{f}_k = \langle f | e_k \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \exp\left(-\frac{2\pi k i}{b-a}\, t\right) dt \,.$$

Si noti che la serie va intesa nell'ambito della metrica introdotta su $L^2([a,b], \mathbf{K})$: si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k \right\| = 0 \,,$$

ossia
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k \exp\left(\frac{2\pi k i}{b-a}\, t\right)\right|^2 dt = 0\,.$$
La questione se valga o meno l'uguaglianza puntuale
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \exp\left(\frac{2\pi k i}{b-a}\, t\right)$$
è ben più complessa e ha impegnato molti dei migliori matematici dal momento in cui fu enunciata, da Fourier, nel 1807. Per una funzione f in $L^2([a,b],\mathbf{K})$, Carleson ha dimostrato (nel 1966) che essa vale per quasi ogni t, ossia al di fuori di un insieme trascurabile. Un esempio di Du Bois-Reymond mostra che la serie potrebbe divergere in alcuni punti anche se f è continua, mentre è noto dai lavori di Dirichlet che l'uguaglianza vale sempre se f è di classe $\mathcal{C}^1$. D'altra parte, se si suppone solamente che f sia integrabile secondo Lebesgue su $[a,b]$, un esempio di Kolmogorov ha mostrato che la serie può divergere per ogni t.

7 Applicazioni lineari

Dati due spazi di Hilbert H e H', diremo che un'applicazione $A : H \to H'$ è "lineare" se, presi $f,g\in H$ e $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$, si ha che $A(\alpha f+\beta g) = \alpha A(f)+\beta A(g)$. Scriveremo spesso Af al posto di $A(f)$.

Teorema. *Due spazi di Hilbert H, H' separabili aventi dimensione infinita sono sempre isomorfi: esiste cioè un'applicazione lineare biiettiva $A : H \to H'$ tale che, presi $f,g\in H$, si ha*
$$\langle Af|Ag\rangle = \langle f|g\rangle\,.$$
Dimostrazione. Sia $(e_k)_k$ una base di H e $(e'_k)_k$ una base di H'. Definiamo $A : H\to H'$ in questo modo:
$$Af = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f|e_k\rangle e'_k\,.$$
Si può vedere che A è lineare, biiettiva e conserva il prodotto scalare. ∎

Diremo che l'applicazione lineare $A : H \to H'$ è "limitata" se esiste un numero reale $\gamma \geq 0$ tale che, per ogni $f \in H$,

$$\|Af\| \leq \gamma \|f\| \,.$$

In tal caso, definiamo

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Af\|}{\|f\|} : f \in H \backslash \{0\} \right\} = \sup \left\{ \|Af\| : \|f\| = 1 \right\} \,.$$

Si verificano le proprietà della norma:

$$\begin{aligned} &a)\ \|A\| \geq 0\,; \\ &b)\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0\,; \\ &c)\ \|\alpha A\| = |\alpha|\ \|A\|\,; \\ &d)\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|\,. \end{aligned}$$

Inoltre, se $A : H \to H'$ e $B : H' \to H''$, possiamo considerare l'applicazione composta $B \circ A : H \to H''$, che indicheremo semplicemente con BA. Se entrambe sono limitate, si ha

$$\|BA\| \leq \|B\|\, \|A\| \,.$$

Teorema. *Un'applicazione lineare è limitata se e solo se è continua.*

Dimostrazione. Sia $A : H \to H'$ limitata. Allora

$$\|Af - Ag\| = \|A(f - g)\| \leq \|A\|\, \|f - g\| \,;$$

quindi A è lipschitziana e pertanto continua.

Viceversa, sia $A : H \to H'$ non limitata. Allora per ogni numero naturale n esiste un $f_n \in H$ tale che $\|Af_n\| > n\|f_n\|$. Posto $g_n = \frac{f_n}{n\|f_n\|}$, si ha che $\lim_n g_n = 0$ e

$$\|Ag_n\| = \left\| A \left(\frac{f_n}{n\|f_n\|} \right) \right\| = \frac{\|Af_n\|}{n\|f_n\|} \geq 1 \,;$$

essendo $A(0) = 0$, l'applicazione A non può essere continua. ∎

Indicheremo con $\mathcal{L}(H, H')$ l'insieme delle applicazioni lineari continue da H a H'. Possiamo renderlo uno spazio metrico introducendo la distanza

$$d(A, B) = \|A - B\| .$$

Teorema. *Con tale distanza, $\mathcal{L}(H, H')$ è uno spazio metrico completo.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $(A_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(H, H')$. Dalla

$$| \|A_n\| - \|A_m\| | \leq \|A_n - A_m\| ,$$

si ha che la successione delle norme $(\|A_n\|)_n$ è di Cauchy in $\mathbf{K}$ e pertanto converge. Dalla

$$\|A_n f - A_m f\| \leq \|A_n - A_m\| \|f\| ,$$

si ha che, per ogni $f \in H$, la successione $(A_n f)_n$ è di Cauchy in H' e pertanto converge. Definiamo $A : H \to H'$ ponendo

$$Af = \lim_n A_n f .$$

Si vede facilmente che A è lineare; inoltre,

$$\|Af\| = \lim_n \|A_n f\| \leq (\lim_n \|A_n\|) \|f\| ,$$

per cui $A \in \mathcal{L}(H, H')$. Resta da verificare che

$$\lim_n A_n = A .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $(A_n)_n$ di Cauchy, esiste un $\bar{n}$ tale che, se $m \geq \bar{n}$ e $n \geq \bar{n}$, allora

$$\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon ,$$

da cui

$$\|A_n f - A_m f\| \leq \varepsilon \|f\| ,$$

per ogni $f \in H$. Passando al limite per $m \to +\infty$ si ha che, se $n \geq \bar{n}$, allora

$$\|A_n f - Af\| \leq \varepsilon \|f\| ,$$

per ogni $f \in H$, e quindi

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon .$$

$\blacksquare$

Se $H = H'$, l'insieme $\mathcal{L}(H,H)$ si denoterà con $\mathcal{L}(H)$ e i suoi elementi si diranno "operatori" in H. Il seguente risultato ci mostra che la composizione è un'operazione continua rispetto alla distanza introdotta.

Teorema. *Sia $(A_n)_n$ una successione in $\mathcal{L}(H)$ tale che $\lim_n A_n = A$. Se $B \in \mathcal{L}(H)$, allora*

$$\lim_n A_n B = AB\,, \quad \lim_n BA_n = BA\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\|A_nB - AB\| = \|(A_n - A)B\| \leq \|A_n - A\|\,\|B\|\,,$$

$$\|BA_n - BA\| = \|B(A_n - A)\| \leq \|B\|\,\|A_n - A\|\,,$$

da cui la tesi. ∎

Teorema. *Se $\mathcal{M}$ è un sottospazio, si ha $P_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(H)$. Se inoltre $\mathcal{M} \neq \{0\}$, si ha $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$.*

Dimostrazione. Presi $f, g \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, si può scrivere in un unico modo $f = f_1 + f_2$ e $g = g_1 + g_2$, con $f_1, g_1 \in \mathcal{M}$ e $f_2, g_2 \in \mathcal{M}^\perp$, dove $f_1 = P_{\mathcal{M}}f$ e $g_1 = P_{\mathcal{M}}g$. Quindi

$$\alpha f + \beta g = \alpha(f_1 + f_2) + \beta(g_1 + g_2) = (\alpha f_1 + \beta g_1) + (\alpha f_2 + \beta g_2)\,,$$

con $\alpha f_1 + \beta g_1 \in \mathcal{M}$ e $\alpha f_2 + \beta g_2 \in \mathcal{M}^\perp$. Per l'unicità della scomposizione, si deve avere

$$P_{\mathcal{M}}(\alpha f + \beta g) = \alpha f_1 + \beta g_1 = \alpha P_{\mathcal{M}}f + \beta P_{\mathcal{M}}g\,.$$

Questo dimostra la linearità di $P_{\mathcal{M}}$. Per il teorema di Pitagora, abbiamo inoltre

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \geq \|f_1\|^2 = \|P_{\mathcal{M}}f\|^2\,,$$

da cui la limitatezza di $P_{\mathcal{M}}$: per ogni $f \in H$, si ha $\|P_{\mathcal{M}}f\| \leq \|f\|$, per cui $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$. Infine, se $\mathcal{M} \neq \{0\}$, prendendo $f \in \mathcal{M}\backslash\{0\}$ si ha $\|P_{\mathcal{M}}f\| = \|f\|$. Ne segue che $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$. ∎

8 Forme bilineari e forme quadratiche

Da ora in poi, supporremo che $\mathbf{K}$ sia il corpo dei numeri complessi $\mathbf{C}$.

Un'applicazione $\varphi : H \times H \to \mathbf{C}$ si dice "bilineare" se, presi f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 in H e $\alpha \in \mathbf{C}$, si ha:

$$
\begin{aligned}
&a)\ \varphi(f_1 + f_2, g) = \varphi(f_1, g) + \varphi(f_2, g)\,;\\
&b)\ \varphi(\alpha f, g) = \alpha\varphi(f, g)\,;\\
&c)\ \varphi(f, g_1 + g_2) = \varphi(f, g_1) + \varphi(f, g_2)\,;\\
&d)\ \varphi(f, \alpha g) = \alpha^*\varphi(f, g)\,.
\end{aligned}
$$

Diremo che un'applicazione bilineare φ è "simmetrica" se

$$\varphi(g, f) = \varphi(f, g)^*\,.$$

Diremo che φ è "limitata" se esiste $\gamma \geq 0$ tale che, per ogni $f, g \in H$,

$$|\varphi(f, g)| \leq \gamma \|f\|\,\|g\|\,;$$

in tal caso, si pone

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\frac{|\varphi(f, g)|}{\|f\|\,\|g\|} : f, g \in H \backslash \{0\}\right\} = \sup\left\{|\varphi(f, g)| : \|f\| = \|g\| = 1\right\}\,.$$

Si definisce la forma quadratica associata a φ:

$$\hat{\varphi}(f) = \varphi(f, f)\,.$$

Teorema. *Vale la seguente:*

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{4}\left[\hat{\varphi}(f + g) - \hat{\varphi}(f - g) + i\hat{\varphi}(f + ig) - i\hat{\varphi}(f - ig)\right]$$

*(***identità polare***).*

<u>Dimostrazione</u>. Si tratta di una verifica diretta. ∎

Corollario. *Se $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$, allora $\varphi = \psi$.*

Teorema. *L'applicazione bilineare φ è simmetrica se e solo se per ogni $f \in H$ si ha che $\hat{\varphi}(f) \in \mathbf{R}$.*

<u>Dimostrazione</u>. Se φ è simmetrica, abbiamo

$$\varphi(f, f) = \varphi(f, f)^* ,$$

e pertanto $\hat{\varphi}(f) \in \mathbf{R}$. Viceversa, se per ogni $f \in H$ si ha che $\hat{\varphi}(f)$ è un numero reale, per l'identità polare, usando le relazioni $\hat{\varphi}(-f) = \hat{\varphi}(f) = \hat{\varphi}(if)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\Re(\varphi(f, g)) &= \frac{1}{4}\left[\hat{\varphi}(f+g) - \hat{\varphi}(f-g)\right] = \Re(\varphi(g, f)) \,, \\
\Im(\varphi(f, g)) &= \frac{1}{4}\left[\hat{\varphi}(f+ig) - \hat{\varphi}(f-ig)\right] = -\Im(\varphi(g, f)) \,,
\end{aligned}$$

da cui $\varphi(f, g) = \varphi(g, f)^*$. ■

Diremo che $\hat{\varphi}$ è "limitata" se esiste $\gamma \geq 0$ tale che, per ogni $f \in H$,

$$|\hat{\varphi}(f)| \leq \gamma \|f\|^2 ;$$

in tal caso, si pone

$$\|\hat{\varphi}\| = \sup\left\{\frac{|\hat{\varphi}(f)|}{\|f\|^2} : f \in H \backslash \{0\}\right\} = \sup\left\{|\hat{\varphi}(f)| : \|f\| = 1\right\} .$$

Teorema. *φ è limitata se e solo se $\hat{\varphi}$ lo è; in tal caso, si ha*

$$\|\hat{\varphi}\| \leq \|\varphi\| \leq 2\|\hat{\varphi}\| .$$

Se inoltre φ è simmetrica, allora $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

<u>Dimostrazione</u>. Se φ è limitata, abbiamo

$$|\hat{\varphi}(f)| = |\varphi(f, f)| \leq \|\varphi\| \, \|f\|^2 ,$$

per cui $\hat{\varphi}$ è limitata e $\|\hat{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$.

Viceversa, se $\hat{\varphi}$ è limitata, usando l'identità polare e l'identità del parallelogramma, abbiamo

$$\begin{aligned}
|\varphi(f, g)| &\leq \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\| \left[\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 + \|f+ig\|^2 + \|f-ig\|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\| \left[2(\|f\|^2 + \|g\|^2) + 2(\|f\|^2 + \|ig\|^2)\right] \\
&= \|\hat{\varphi}\| \left[\|f\|^2 + \|g\|^2\right] .
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi che

$$\|f\| = \|g\| = 1 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(f,g)| \leq 2\|\hat{\varphi}\| \, ;$$

ne segue che φ è limitata e $\|\varphi\| \leq 2\|\hat{\varphi}\|$.

Supponiamo ora che φ sia limitata e simmetrica. Scriviamo il numero complesso $\varphi(f,g)$ in forma trigonometrica:

$$\varphi(f,g) = \rho e^{i\theta} \, ,$$

dove $\rho = |\varphi(f,g)|$ è un numero reale:

$$\rho = e^{-i\theta}\varphi(f,g) = \varphi(e^{-i\theta}f, g) \, .$$

Per l'identità polare, essendo $\hat{\varphi}$ a valori in $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(e^{-i\theta}f,g) &= \frac{1}{4}\left[\hat{\varphi}(e^{-i\theta}f+g) + \hat{\varphi}(e^{-i\theta}f-g)\right] \\
&\leq \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\|\left[\|e^{-i\theta}f+g\|^2 + \|e^{-i\theta}f-g\|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\|\left[2(\|e^{-i\theta}f\|^2 + \|g\|^2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\|\hat{\varphi}\|\left[\|f\|^2 + \|g\|^2\right] \, ,
\end{aligned}$$

e procedendo similmente a sopra si trova che $\|\varphi\| \leq \|\hat{\varphi}\|$. ■

Teorema. *Sia* $\varphi : H \times H \to \mathbf{C}$ *una forma bilineare simmetrica tale che*

$$\forall f \in H \quad \hat{\varphi}(f) \geq 0 \, ;$$

allora

$$|\varphi(f,g)|^2 \leq \hat{\varphi}(f)\hat{\varphi}(g) \, .$$

*(***disuguaglianza di Schwarz generalizzata***).*

Dimostrazione. Se $\varphi(f,g) = 0$, la disuguaglianza è certamente verificata. Supponiamo ora $\varphi(f,g) \neq 0$. Vediamo che deve essere $\hat{\varphi}(g) \neq 0$; infatti, dalla

$$0 \leq \varphi(f-\alpha g, f-\alpha g) = \hat{\varphi}(f) - \alpha^*\varphi(f,g) - \alpha\varphi(g,f) + |\alpha|^2\hat{\varphi}(g) \, ,$$

valida per ogni $\alpha \in \mathbf{C}$, se $\hat{\varphi}(g) = 0$ si trova una contraddizione prendendo

$$\alpha = \frac{\hat{\varphi}(f) + 1}{2\varphi(g, f)} .$$

Quindi $\hat{\varphi}(g) \neq 0$, e, prendendo nella disuguaglianza scritta sopra

$$\alpha = \frac{\varphi(f, g)}{\hat{\varphi}(g)} ,$$

troviamo

$$0 \leq \hat{\varphi}(f) - \frac{|\varphi(f,g)|^2}{\hat{\varphi}(g)} - \frac{|\varphi(f,g)|^2}{\hat{\varphi}(g)} + \left|\frac{\varphi(f,g)}{\hat{\varphi}(g)}\right|^2 \hat{\varphi}(g) = \hat{\varphi}(f) - \frac{|\varphi(f,g)|^2}{\hat{\varphi}(g)} ,$$

da cui la disuguaglianza cercata. ■

9 L'operatore aggiunto

Sia $g \in H$ fissato e $G : H \to \mathbf{C}$ definito da $G(f) = \langle f|g \rangle$. Si vede facilmente che $G \in \mathcal{L}(H, \mathbf{C})$ e $\|G\| = \|g\|$. Vediamo che vale anche il viceversa.

Teorema di Riesz. *Data $G \in \mathcal{L}(H, \mathbf{C})$, esiste un unico $g \in H$ tale che*

$$G(f) = \langle f|g \rangle .$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M} = \{f \in H : G(f) = 0\}$. Si verifica facilmente che $\mathcal{M}$ è un sottospazio di H. Se $\mathcal{M} = H$, basta prendere $g = 0$; altrimenti, scegliamo un $w \in \mathcal{M}^\perp$ con $\|w\| = 1$ e poniamo $g = G(w)^* w$. Allora $G(g) = |G(w)|^2 = \|g\|^2$ e per ogni $f \in H$ si ha che $f - \frac{G(f)}{G(g)} g \in \mathcal{M}$. Quindi,

$$\langle f|g \rangle = \left\langle \left(f - \frac{G(f)}{G(g)} g \right) + \frac{G(f)}{G(g)} g \middle| g \right\rangle = \frac{G(f)}{G(g)} \|g\|^2 = G(f).$$

Verifichiamo ora che tale g è unico. Se ce ne fossero due, g_1 e g_2, per ogni $f \in H$ si avrebbe che $\langle f|g_1 \rangle = \langle f|g_2 \rangle$ e quindi $\langle f|g_1 - g_2 \rangle = 0$. Prendendo $f = g_1 - g_2$ si vede che deve essere $g_1 = g_2$. ■

Sia ora $A \in \mathcal{L}(H)$ e $\varphi : H \times H \to \mathbf{C}$ definita da $\varphi(f, g) = \langle f|Ag \rangle$. Si vede facilmente che φ è una forma bilineare limitata e $\|\varphi\| \leq \|A\|$.

Teorema. *Sia φ una forma bilineare limitata su H. Allora esiste un unico $A \in \mathcal{L}(H)$ tale che*

$$\varphi(f,g) = \langle f|Ag\rangle\,.$$

Inoltre, si ha $\|A\| = \|\varphi\|$.

Dimostrazione. Per ogni fissato $g \in H$, consideriamo la funzione $G : H \to \mathbf{C}$ definita da $G(f) = \varphi(f,g)$. Si vede facilmente che $G \in \mathcal{L}(H,\mathbf{C})$ e $\|G\| \leq \|\varphi\|\,\|g\|$. Per Riesz, esiste un unico $g' \in H$ tale che, per ogni $f \in H$, si ha $G(f) = \langle f|g'\rangle$. Definiamo l'applicazione A ponendo $Ag = g'$. Si verifica che A è lineare e

$$\|Ag\| = \|G\| \leq \|\varphi\|\,\|g\|\,,$$

per cui $A \in \mathcal{L}(H)$ e $\|A\| \leq \|\varphi\|$. Ma essendo $\varphi(f,g) = \langle f|Ag\rangle$, si ha anche $\|\varphi\| \leq \|A\|$, per cui $\|A\| = \|\varphi\|$. Verifichiamo ora l'unicità di A. Se ce ne fossero due, A_1 e A_2, per ogni $f,g \in H$ si avrebbe che $\langle f|A_1g\rangle = \langle f|A_2g\rangle$ e pertanto $\langle f|A_1g - A_2g\rangle = 0$; deve quindi essere $A_1g = A_2g$, per ogni $g \in H$. ∎

Corollario. *Dato $A \in \mathcal{L}(H)$, esiste un unico operatore $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tale che*

$$\langle Af|g\rangle = \langle f|A^*g\rangle\,.$$

Dimostrazione. Si definisce $\varphi(f,g) = \langle Af|g\rangle$. Si vede che φ è bilineare e limitata, per cui esiste un unico $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tale che $\varphi(f,g) = \langle f|A^*g\rangle$. ∎

L'operatore A^* si dice "aggiunto" di A; valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&(A^*)^* = A\\
&(\alpha A)^* = \alpha^* A^*\\
&(A+B)^* = A^* + B^*\\
&(BA)^* = A^* B^*
\end{aligned}$$

Inoltre, se A è invertibile e $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, allora esiste anche $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e si ha

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*\,.$$

10 Operatori autoaggiunti

Diremo che un operatore $A \in \mathcal{L}(H)$ è "autoaggiunto" se $A = A^*$: per ogni $f, g \in H$, si ha
$$\langle Af|g\rangle = \langle f|Ag\rangle \,.$$

Teorema. *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto, si ha*
$$\|A\| = \sup\left\{\frac{|\langle Af|f\rangle|}{\|f\|^2} : f \in H\backslash\{0\}\right\}.$$

Dimostrazione. La forma bilineare $\varphi(f,g) = \langle Af|g\rangle$ è simmetrica, pertanto la sua norma coincide con la norma della forma quadratica associata. ■

Dato $A \in \mathcal{L}(H)$, scriveremo brevemente $A^2 = AA$. Diremo che A è "idempotente" se $A^2 = A$.

Teorema. *Un operatore $P \in \mathcal{L}(H)$ è una proiezione ortogonale se e solo se P è autoaggiunto e idempotente.*

Dimostrazione. Se $P = P_{\mathcal{M}}$, per un certo sottospazio $\mathcal{M}$, allora per ogni $f \in H$ si ha che $P_{\mathcal{M}}f \in \mathcal{M}$ e quindi $P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}}f) = P_{\mathcal{M}}f$, ossia $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$. Inoltre, presi $f, g \in H$, si ha
$$\langle P_{\mathcal{M}}f|g\rangle = \langle P_{\mathcal{M}}f|P_{\mathcal{M}}g + (g - P_{\mathcal{M}}g)\rangle = \langle P_{\mathcal{M}}f|P_{\mathcal{M}}g\rangle$$
e
$$\langle f|P_{\mathcal{M}}g\rangle = \langle P_{\mathcal{M}}f + (f - P_{\mathcal{M}}f)|P_{\mathcal{M}}g\rangle = \langle P_{\mathcal{M}}f|P_{\mathcal{M}}g\rangle \,,$$
per cui $P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}^*$.

Viceversa, sia P tale che $P^2 = P = P^*$. Consideriamo $\mathcal{M} = \{f : Pf = f\}$: si verifica che è un sottospazio. Preso $f \in H$, si ha che $P(Pf) = Pf$, per cui $Pf \in \mathcal{M}$. Inoltre, per ogni $g \in \mathcal{M}$, si ha $g = Pg$, per cui
$$\langle f - Pf|g\rangle = \langle f|g\rangle - \langle Pf|g\rangle = \langle f|g\rangle - \langle f|Pg\rangle = 0\,;$$
quindi $f - Pf \in \mathcal{M}^\perp$. Essendo $f = Pf + (f - Pf)$, con $Pf \in \mathcal{M}$ e $f - Pf \in \mathcal{M}^\perp$, deve essere $Pf = P_{\mathcal{M}}f$. ■

Teorema. *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono due sottospazi tali che $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, allora $P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M}$ è una proiezione ortogonale.*

Dimostrazione. Essendo $P_\mathcal{N}^* = P_\mathcal{N}$ e $P_\mathcal{M}^* = P_\mathcal{M}$, si ha che

$$(P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})^* = P_\mathcal{N}^* - P_\mathcal{M}^* = P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M} \,.$$

Inoltre,

$$(P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})^2 = P_\mathcal{N}^2 - P_\mathcal{N} P_\mathcal{M} - P_\mathcal{M} P_\mathcal{N} + P_\mathcal{M}^2 \,.$$

Ma $P_\mathcal{N}^2 = P_\mathcal{N}$ e $P_\mathcal{M}^2 = P_\mathcal{M}$; inoltre, siccome $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, si ha che $P_\mathcal{N} P_\mathcal{M} = P_\mathcal{M}$. Infine,

$$P_\mathcal{M} P_\mathcal{N} = P_\mathcal{M}^* P_\mathcal{N}^* = (P_\mathcal{N} P_\mathcal{M})^* = P_\mathcal{M}^* = P_\mathcal{M} \,.$$

In conclusione, si ha

$$(P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M})^2 = P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M} - P_\mathcal{M} + P_\mathcal{M} = P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M} \,.$$

Essendo autoaggiunto e idempotente, $P_\mathcal{N} - P_\mathcal{M}$ è una proiezione ortogonale.

■

Nella situazione del teorema precedente, se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, si usa scrivere

$$P_\mathcal{M} \leq P_\mathcal{N} \,.$$

11 Lo spettro di un operatore

Diremo che $\lambda \in \mathbf{C}$ è un "autovalore" dell'operatore $A \in \mathcal{L}(H)$ se esiste un $f \in H$ non nullo tale che $Af = \lambda f$; tale f è allora un "autovettore" di A.

Diremo che $\lambda \in \mathbf{C}$ è un "autovalore generalizzato" di $A \in \mathcal{L}(H)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $f \in H$ tale che $\|f\| = 1$ e $\|Af - \lambda f\| < \varepsilon$.

Diremo che $\lambda \in \mathbf{C}$ è un "valore regolare" di $A \in \mathcal{L}(H)$ se esiste $(A - \lambda I)^{-1}$ ed è in $\mathcal{L}(H)$. Chiamiamo "insieme risolvente" di A l'insieme $\rho(A)$ dei valori regolari di A. Il suo complementare in $\mathbf{C}$ si chiama "spettro" di A e si denota con $\sigma(A)$.

È chiaro che ogni autovalore appartiene allo spettro. Lo stesso vale per gli autovalori generalizzati, come risulta dal seguente

Teorema. *Se λ è un autovalore generalizzato di A, allora $\lambda \in \sigma(A)$.*

Dimostrazione. Se $\lambda \in \rho(A)$, allora esiste $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e si ha

$$\|f\| = \|(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)f\| \le \|(A-\lambda I)^{-1}\| \, \|(A-\lambda I)f\| \, .$$

Quindi, se $\|f\| = 1$,

$$\|(A-\lambda I)f\| \ge \frac{1}{\|(A-\lambda I)^{-1}\|} \, ,$$

per cui λ non è un autovalore generalizzato. ■

Definiamo per induzione l'operatore A^n: si pone $A^0 = I$ e, supposto definito A^{n-1}, si pone $A^n = A^{n-1}A$.

Teorema. *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è tale che*

$$\|I - A\| < 1 \, ,$$

allora $0 \in \rho(A)$, ossia A è invertibile con $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Dimostrazione. Poniamo $B = I - A$, per cui $\|B\| < 1$. Dalla

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} B^k \right\| \le \sum_{k=m}^{n} \|B^k\| = \sum_{k=m}^{n} \|B\|^k \le \sum_{k=m}^{\infty} \|B\|^k = \frac{\|B\|^m}{1 - \|B\|}$$

si vede che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ è di Cauchy e pertanto converge in $\mathcal{L}(H)$, essendo questo uno spazio metrico completo. Dimostriamo che A^{-1} è dato da

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

(la **serie di Neumann**). Infatti,

$$\begin{aligned}
(I-B)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k\right) &= (I-B)\left(\lim_n \sum_{k=0}^{n} B^k\right) \\
&= \lim_n \left[(I-B)\left(\sum_{k=0}^{n} B^k\right)\right] \\
&= \lim_n (I - B^{n+1}) = I \, ,
\end{aligned}$$

e allo stesso modo

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B^k\right)(I-B) &= \left(\lim_n \sum_{k=0}^{n} B^k\right)(I-B) \\ &= \lim_n \left[\left(\sum_{k=0}^{n} B^k\right)(I-B)\right] \\ &= \lim_n (I-B^{n+1}) = I\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Teorema. *Se $A \in \mathcal{L}(H)$, lo spettro è un insieme chiuso e*

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \leq \|A\|\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\rho(A)$ è aperto. Preso $\lambda \in \rho(A)$, sia $\mu \in \mathbf{C}$ tale che

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|(A-\lambda I\|)^{-1}}\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\|I-(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)\| &= \|(A-\lambda I)^{-1}[(A-\lambda I)-(A-\mu I)]\| \\ &\leq \|(A-\lambda I)^{-1}\|\,|\mu-\lambda| \\ &< 1\,,\end{aligned}$$

e quindi $0 \in \rho((A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I))$. Ne segue che $\mu \in \rho(A)$, il che dimostra che $\rho(A)$ è aperto.

Sia ora $\lambda \in \mathbf{C}$ tale che $|\lambda| > \|A\|$. Essendo

$$\left\|I - \left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\lambda}A\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1\,,$$

si ha che $0 \in \rho(I - \frac{1}{\lambda}A)$; ne segue che $\lambda \in \rho(A)$. ■

12 Lo spettro di un operatore autoaggiunto

Teorema. *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto, allora $\sigma(A) \subseteq \mathbf{R}$ e ogni elemento di $\sigma(A)$ è un autovalore generalizzato.*

Dimostrazione. Se λ è un autovalore, allora $Af = \lambda f$ per un certo f non nullo. Essendo A autoaggiunto, si ha che $\langle Af|f\rangle = \langle f|Af\rangle$, e quindi $\langle Af|f\rangle$

è un numero reale. D'altra parte, $\langle Af|f\rangle = \lambda\|f\|^2$, e quindi anche λ deve essere reale. Ciò dimostra che ogni autovalore di A è reale.

Dimostriamo ora che ogni elemento dello spettro è un autovalore generalizzato. Supponiamo che λ non sia un autovalore generalizzato; allora esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $f \in H$,

$$\|(A - \lambda I)f\| \geq \varepsilon\|f\|\,.$$

Consideriamo l'insieme immagine $\mathcal{M} = (A - \lambda I)(H)$. È una varietà lineare; inoltre, presa una successione $(y_n)_n$ in $\mathcal{M}$ tale che $\lim_n y_n = \bar{y}$, si ha che $(y_n)_n$ è di Cauchy, $y_n = (A - \lambda I)f_n$ per un certo $f_n \in H$ e

$$\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|(A - \lambda I)(f_m - f_n)\| = \frac{1}{\varepsilon}\|y_m - y_n\|\,,$$

per cui anche $(f_n)_n$ è di Cauchy. Quindi esiste il limite $\lim_n f_n = \bar{f}$ e per la continuità di $A - \lambda I$, si ha che $\bar{y} = \lim_n (A - \lambda I)f_n = (A - \lambda I)\bar{f}$. Questo dimostra che $\mathcal{M}$ è chiuso, quindi un sottospazio.

Dimostriamo che $\mathcal{M} = H$. Se così non fosse, esisterebbe un $g \in \mathcal{M}^\perp$ non nullo, per cui, per ogni $f \in H$,

$$0 = \langle (A - \lambda I)f|g\rangle = \langle f|(A - \lambda I)^* g\rangle = \langle f|(A - \lambda^* I)g\rangle\,.$$

Ma allora $(A - \lambda^* I)g = 0$, per cui λ^* è un autovalore di A. Ma allora λ^* è reale, ossia $\lambda^* = \lambda$, per cui λ è un autovalore, in contraddizione col fatto che λ non è un autovalore generalizzato.

Si ha quindi che l'applicazione $A - \lambda I : H \to H$ è suriettiva. Vediamo che è anche iniettiva: se $(A - \lambda I)f_1 = (A - \lambda I)f_2$, allora

$$\|f_1 - f_2\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|(A - \lambda I)(f_1 - f_2)\| = 0\,,$$

per cui $f_1 = f_2$.

Resta da vedere che $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. La linearità è di semplice verifica. Inoltre, per ogni $y \in H$, si ha

$$\|(A - \lambda I)^{-1} y\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|y\|\,,$$

per cui $(A - \lambda I)^{-1}$ è limitata. Ne segue che $\lambda \in \rho(A)$. In conclusione, se λ non è un autovalore generalizzato, esso è un valore regolare.

Dimostriamo ora che $\sigma(A) \subseteq \mathbf{R}$. Sia $\lambda \in \sigma(A)$; allora, per ogni $f \in H$,

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda^*| \, \|f\|^2 &= |\langle (A - \lambda^* I)f|f\rangle - \langle (A - \lambda I)f|f\rangle| \\ &= |\langle f|(A - \lambda I)f\rangle - \langle (A - \lambda I)f|f\rangle| \\ &\leq 2\|Af - \lambda f\| \, \|f\| \, . \end{aligned}$$

Quindi, se $\|f\| = 1$, si ha

$$\|Af - \lambda f\| \geq \frac{1}{2}|\lambda - \lambda^*| \, ,$$

e siccome λ è un autovalore generalizzato, deve essere $|\lambda - \lambda^*| = 0$, ossia $\lambda = \lambda^*$. ∎

Teorema. *Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto, poniamo*

$$\alpha_1 = \inf\{\langle Af|f\rangle : \|f\| = 1\} \, , \quad \alpha_2 = \sup\{\langle Af|f\rangle : \|f\| = 1\} \, .$$

Allora $\sigma(A) \subseteq [\alpha_1, \alpha_2]$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \sigma(A)$.

Dimostrazione. Considerando l'operatore autoaggiunto

$$\tilde{A} = A - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} I \, ,$$

abbiamo che

$$\|\tilde{A}\| = \sup\{|\langle \tilde{A}f|f\rangle| : \|f\| = 1\} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \, ,$$

per cui $\sigma(\tilde{A}) \subseteq \left[-\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right]$. Ne segue che $\sigma(A) \subseteq [\alpha_1, \alpha_2]$.

Dimostriamo ora che α_1 è un autovalore generalizzato di A. Per le proprietà dell'estremo inferiore, per ogni $n \geq 1$ esiste un f_n tale che $\|f_n\| = 1$ e

$$\langle Af_n|f_n\rangle < \alpha_1 + \frac{1}{n} \, .$$

Posto $\varphi(f,g) = \langle Bf|g\rangle$ con $B = A - \alpha_1 I$, usando la disuguaglianza di Schwarz generalizzata abbiamo

$$\begin{aligned} \|Bf\|^4 &= |\langle Bf|Bf\rangle|^2 \leq \langle Bf|f\rangle \langle BBf|Bf\rangle \\ &\leq \langle Bf|f\rangle \|BBf\| \, \|Bf\| \leq \langle Bf|f\rangle \|B\| \, \|Bf\|^2 \, , \end{aligned}$$

per ogni $f \in H$, da cui

$$\|(A - \alpha_1 I)f\|^2 \leq \langle (A - \alpha_1 I)f|f\rangle \|A - \alpha_1 I\| \,.$$

Quindi,

$$\|(A - \alpha_1 I)f_n\|^2 < \frac{1}{n}\|A - \alpha_1 I\| \,,$$

da cui segue che α_1 è un autovalore generalizzato.

Un argomento analogo mostra che anche α_2 è un autovalore generalizzato, concludendo la dimostrazione. ■

Come conseguenza immediata, abbiamo che, se $A \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto,

$$\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \,.$$

13 La famiglia spettrale

In questa sezione, supporremo che l'operatore $A \in \mathcal{L}(H)$ sia autoaggiunto. Come in precedenza, scriveremo $\alpha_1 = \min \sigma(A)$ e $\alpha_2 = \max \sigma(A)$.

Illustreremo la teoria che porta ad approssimare ogni operatore autoaggiunto con combinazioni lineari di proiezioni ortogonali. Le dimostrazioni dei risultati qui esposti si possono trovare nell'ottimo libro "Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space" di Gilbert Helmberg.

Dato un polinomio $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a coefficienti reali

$$p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 \,,$$

definiamo l'operatore

$$p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I \,.$$

Si può dimostrare che $p(A)$ è autoaggiunto,

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \,,$$

e quindi

$$\|p(A)\| = \max\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \,.$$

Si verifica facilmente che, dati due polinomi p e q, l'operatore associato al loro prodotto è la composizione dei rispettivi operatori:

$$(pq)(A) = p(A)q(A)\,.$$

Sia ora $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Per il teorema di approssimazione di Weierstrass, possiamo considerare una successione $(p_n)_n$ di polinomi tali che

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{n}\,,$$

per ogni $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Si può allora dimostrare che esiste un operatore, che indicheremo con $\varphi(A)$, per cui si ha

$$\varphi(A) = \lim_n p_n(A)\,.$$

Tale operatore non dipende dalla scelta della successione di polinomi $(p_n)_n$. Inoltre, $\varphi(A)$ è autoaggiunto,

$$\sigma(\varphi(A)) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}\,,$$

e quindi

$$\|\varphi(A)\| = \max\{|\varphi(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}\,.$$

Anche qui si può verificare che, date due funzioni continue φ e ψ, l'operatore associato al loro prodotto è la composizione dei rispettivi operatori:

$$(\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)\,.$$

Definiamo ora la seguente funzione:

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq \lambda\,, \\ 0 & \text{se } x > \lambda\,. \end{cases}$$

Come facilmente si vede, si ha che

$$\varphi_\lambda(x) = \lim_n \varphi_{\lambda,n}(x)\,,$$

dove $(\varphi_{\lambda,n})_n$ è la successione di funzioni continue così definite:

$$\varphi_{\lambda,n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq \lambda\,, \\ 1 - n(x-\lambda) & \text{se } \lambda \leq x \leq \lambda + \frac{1}{n}\,, \\ 0 & \text{se } x \geq \lambda + \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$

Si può dimostrare che esiste un operatore, che indicheremo con $\varphi_\lambda(A)$, tale che, per ogni $f \in H$, si ha

$$\varphi_\lambda(A)f = \lim_n \varphi_{\lambda,n}(A)f \,.$$

Inoltre, $\varphi_\lambda(A)$ è autoaggiunto e, come sopra, l'operatore associato al prodotto è la composizione dei rispettivi operatori: $(\varphi_\lambda\varphi_\mu)(A) = \varphi_\lambda(A)\varphi_\mu(A)$. Si noti che

$$\varphi_\lambda\varphi_\mu = \begin{cases} \varphi_\lambda & \text{se } \lambda \leq \mu \,, \\ \varphi_\mu & \text{se } \lambda > \mu \,. \end{cases}$$

Prendendo $\mu = \lambda$, essendo $\varphi_\lambda^2 = \varphi_\lambda$, si ha che $\varphi_\lambda(A)^2 = \varphi_\lambda(A)$. Quindi, $\varphi_\lambda(A)$ è una proiezione ortogonale: scriveremo

$$P(\lambda) = \varphi_\lambda(A) \,.$$

Si possono dimostrare le seguenti proprietà:

a) $\lambda < \lambda' \Rightarrow P(\lambda) \leq P(\lambda')$;
b) $\lambda < \alpha_1 \Rightarrow P(\lambda) = 0$;
c) $\lambda \geq \alpha_2 \Rightarrow P(\lambda) = I$;
d) per ogni $f \in H$, si ha $P(\lambda)f = \lim_{\mu\to\lambda^+} P(\mu)f$.

Si può inoltre vedere che

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad P(\lambda - \rho) \neq P(\lambda + \rho) \,,$$

e che

$$\lambda \text{ è un autovalore di } A \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in H \;:\; P(\lambda)f \neq \lim_{\mu\to\lambda^-} P(\mu)f \,.$$

Quindi, se λ è un punto isolato di $\sigma(A)$, esso è certamente un autovalore, in quanto esiste un $\bar\rho > 0$ tale che $P(\lambda - \bar\rho) \neq P(\lambda + \bar\rho)$ e

$$P(\mu) = \begin{cases} P(\lambda - \bar\rho) & \text{se } \lambda - \bar\rho \leq \mu < \lambda \,, \\ P(\lambda + \bar\rho) & \text{se } \lambda \leq \mu \leq \lambda + \bar\rho \,. \end{cases}$$

Inoltre, in questo caso si può vedere che l'operatore

$$P(\lambda + \bar\rho) - P(\lambda - \bar\rho) = P(\lambda) - \lim_{\mu\to\lambda^-} P(\mu)$$

è la proiezione ortogonale su $\{f \in H : Af = \lambda f\}$, detto "autospazio" relativo all'autovalore λ.

L'insieme $\{P(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ si chiama "famiglia spettrale" associata all'operatore autoaggiunto A.

14 Decomposizione spettrale

Fissiamo un $\theta > 0$ e consideriamo una funzione $\phi : [\alpha_1 - \theta, \alpha_2] \to \mathbf{R}$ uniformemente continua: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|x - x'| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\phi(x) - \phi(x')| \leq \varepsilon\,.$$

Prendiamo una P-partizione $\delta-$fine di $[\alpha_1 - \theta, \alpha_2]$, ossia scegliamo dei punti λ_j, λ'_j tali che

$$\alpha_1 - \theta = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_m = \alpha_2\,,$$

e, per ogni $j \in \{1, 2, ..., m\}$,

$$\lambda'_j - \delta \leq \lambda_{j-1} \leq \lambda'_j \leq \lambda_j \leq \lambda'_j + \delta\,.$$

Allora, per ogni $x \in [\alpha_1 - \theta, \alpha_2]$, si ha

$$\left|\phi(x) - \sum_{j=1}^{m} \phi(\lambda'_j)(\varphi_{\lambda_j}(x) - \varphi_{\lambda_{j-1}}(x))\right| \leq \varepsilon\,.$$

Si può dimostrare che, prendendo gli operatori associati, si ha

$$\left\|\phi(A) - \sum_{j=1}^{m} \phi(\lambda'_j)(P(\lambda_j) - P(\lambda_{j-1}))\right\| =$$
$$= \max\left\{\left|\phi(\lambda) - \sum_{j=1}^{m} \phi(\lambda'_j)(\varphi_{\lambda_j}(\lambda) - \varphi_{\lambda_{j-1}}(\lambda))\right| : \lambda \in \sigma(A)\right\} \leq \varepsilon\,.$$

Riassumendo, si ha che

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ :\ \text{per ogni P-partizione } \delta\text{−fine si ha}$$
$$\left\|\phi(A) - \sum_{j=1}^{m} \phi(\lambda'_j)(P(\lambda_j) - P(\lambda_{j-1}))\right\| \leq \varepsilon\,.$$

Usando la notazione di Stieltjes, scriveremo brevemente

$$\phi(A) = \int_{\alpha_1 - \theta}^{\alpha_2} \phi(\lambda)\, dP(\lambda)$$

Possiamo ora enunciare il “Teorema di decomposizione spettrale” per un operatore autoaggiunto.

Teorema. *Sia $A \in \mathcal{L}(H)$ un operatore autoaggiunto e siano $\alpha_1 = \min \sigma(A)$ e $\alpha_2 = \max \sigma(A)$. Allora è univocamente determinata una famiglia di proiezioni ortogonali $\{P(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ con le seguenti proprietà:*

a) $\lambda < \lambda' \Rightarrow P(\lambda) \leq P(\lambda')$;

b) $\lambda < \alpha_1 \Rightarrow P(\lambda) = 0$;

c) $\lambda \geq \alpha_2 \Rightarrow P(\lambda) = I$;

d) per ogni $f \in H$, *si ha* $P(\lambda)f = \lim_{\mu \to \lambda^+} P(\mu)f$;

e) per ogni $\theta > 0$, *si ha* $A = \int_{\alpha_1 - \theta}^{\alpha_2} \lambda \, dP(\lambda)$.

Infine, dati due operatori autoaggiunti A e B, con le rispettive famiglie spettrali $\{P_A(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ e $\{P_B(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$, si può dimostrare che $AB = BA$ se e solo se, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, si ha che $P_A(\lambda)P_B(\mu) = P_B(\mu)P_A(\lambda)$. In tal caso, si dice che i due operatori "commutano".

15 Operatori non limitati

Sia $D(A) \subseteq H$ una varietà lineare, dominio di un'applicaizone lineare $A : D(A) \to H$, possibilmente non limitata. Per comodità, continueremo a chiamare A "operatore". Si definiscono come in precedenza le nozioni di autovalore, autovalore generalizzato e spettro di A, che denoteremo ancora con $\sigma(A)$. Si può dimostrare che lo spettro è un insieme chiuso; in generale, però, non è detto che sia limitato.

Se $\overline{D(A)} = H$, è possibile definire "l'aggiunto" $A^* : D(A^*) \to H$ tale che, per ogni $f \in D(A)$ e $g \in D(A^*)$, si abbia

$$\langle Af | g \rangle = \langle f | A^* g \rangle \, .$$

Si dice che A è autoaggiunto se $A = A^*$ (il che significa anche che $D(A) = D(A^*)$).

Si può dimostrare che, se A è autoaggiunto, il suo spettro è reale ed è costituito solamente da autovalori generalizzati.

Possiamo ora enunciare il "Teorema di decomposizione spettrale" per un operatore autoaggiunto possibilmente non limitato.

Teorema. *Sia $A : D(A) \subseteq H \to H$ lineare autoaggiunto. Allora è univocamente determinata una famiglia di proiezioni ortogonali $\{P(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ con le seguenti proprietà:*

a) $\lambda < \lambda' \Rightarrow P(\lambda) \leq P(\lambda')$
e, per ogni $f \in D(A)$*, si ha:*
b) $\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda)f = 0\,;$
c) $\lim_{\lambda \to +\infty} P(\lambda)f = f\,;$
d) $P(\lambda)f = \lim_{\mu \to \lambda^+} P(\mu)f\,;$
e) $Af = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dP(\lambda)f\,.$

La proprietà e) ha il seguente significato: per ogni $\varepsilon > 0$, esistono un $\delta > 0$ e un $R > 0$ tali che, presi $\alpha \leq -R$ e $\beta \geq R$, per ogni P-partizione $\delta-$fine di $[\alpha, \beta]$ si ha

$$\left\| Af - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' (P(\lambda_j) - P(\lambda_{j-1}))f \right\| \leq \varepsilon\,.$$

Si può inoltre vedere che

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad P(\lambda - \rho) \neq P(\lambda + \rho)\,,$$

e che

$$\lambda \text{ è un autovalore di } A \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in H \;:\; P(\lambda)f \neq \lim_{\mu \to \lambda^-} P(\mu)f\,.$$

In particolare, se λ è un punto isolato di $\sigma(A)$, esso è certamente un autovalore e l'operatore

$$P(\lambda) - \lim_{\mu \to \lambda^-} P(\mu)$$

è la proiezione ortogonale sull'autospazio $\{f \in H : Af = \lambda f\}$.

Infine, dati due operatori autoaggiunti A e B, con le rispettive famiglie spettrali $\{P_A(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ e $\{P_B(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$, essi commutano se e solo se, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, si ha che $P_A(\lambda)P_B(\mu) = P_B(\mu)P_A(\lambda)$.

16 Un accenno alla meccanica quantistica

Nella teoria della meccanica quantistica, si assume che un sistema fisico isolato sia determinato da un vettore non nullo f dello spazio di Hilbert

$$H = L^2(\Omega, \mathbf{C})\,.$$

Qui Ω può essere un intervallo di $\mathbf{R}$ o, in generale, un dominio in $\mathbf{R}^N$. Chiameremo f **vettore di stato**; in genere, possiamo sempre normalizzarlo e supporre quindi che

$$||f|| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} = 1 \; .$$

Nota. Il vettore di stato cambia nel tempo in accordo con l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} f = \mathcal{H} f \; ,$$

ma in questa nota non ci occuperemo di questa questione. Vogliamo considerare il sistema fisico in un istante di tempo fissato.

Supponiamo di voler eseguire una misurazione sul sistema: di posizione, o di momento, o di energia... In questa teoria, ad ogni tipo di misurazione viene associato un operatore lineare autoaggiunto in H. Sia A un tale operatore, e sia $\{P_A(\lambda) : \lambda \in \mathbf{R}\}$ la sua famiglia spettrale.

Fissiamo ora un intervallo $]\alpha, \beta]$. Lo scopo della misurazione sarà di stabilire se il risultato sia o no in $]\alpha, \beta]$. In generale, però, questo risultato non può essere previsto con sicurezza. La teoria stabilisce che la probabilità che il risultato della nostra misurazione sia in $]\alpha, \beta]$ è data da

$$\Pi = ||(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f||^2 \; .$$

Si vede allora che questa probabilità è non nulla se e solo se $]\alpha, \beta] \cap \sigma(A) \neq \emptyset$.

Infine, una volta effettuata la misurazione, la teoria ci dice che il vettore di stato automaticamente cambia: se il risultato è stato effettivamente trovato in $]\alpha, \beta]$, il nuovo vettore di stato è

$$f' = \frac{(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f}{||(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f||} \; .$$

Si vede allora che, se ripetiamo subito dopo lo stesso tipo di misurazione, il risultato si troverà con sicurezza ancora in $]\alpha, \beta]$. In altri termini, la probabilità di trovare il nuovo risultato in un intervallo disgiunto da $]\alpha, \beta]$ è nulla.

Esempio 1. L'operatore di posizione "x" è definito da

$$(Ag)(x) = xg(x) \; .$$

Si può vedere che $\sigma(A) = \mathbf{R}$ e

$$(P_A(\lambda)g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \leq \lambda \; , \\ 0 & \text{se } x > \lambda \; . \end{cases}$$

La probabilità di trovare il risultato in $]\alpha, \beta]$ è

$$\Pi = \int_\alpha^\beta |f(x)|^2 \, dx \; .$$

Dopo la misurazione, se il risultato è stato trovato in $]\alpha, \beta]$, il nuovo vettore di stato è

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^2 \, dx \right)^{-1/2} f(x) & \text{se } \alpha < x \leq \beta \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio 2. Supponiamo che $\sigma(A)$ sia costituito da una successione

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$$

di autovalori semplici: per ogni λ_k, sia f_k il relativo autovettore normalizzato. Se prendo l'intervallo $]\alpha, \beta]$ in modo che in esso cada un unico autovalore λ_k, allora, essendo

$$(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f = \langle f | f_k \rangle f_k \; ,$$

la probabilità che il risultato della nostra misurazione sia in $]\alpha, \beta]$ è

$$\Pi = |\langle f | f_k \rangle|^2 \; .$$

Una volta effettuata la misurazione, se il risultato è stato effettivamente trovato in $]\alpha, \beta]$, il nuovo vettore di stato sarà

$$f' = \frac{\langle f | f_k \rangle}{|\langle f | f_k \rangle|} f_k \; .$$

Se ora restringiamo l'intervallo e prendiamo un $]\alpha', \beta']$ con $\lambda_k \in \,]\alpha', \beta'] \subset \,]\alpha, \beta]$, siccome l'unico elemento di $\sigma(A)$ in $]\alpha, \beta]$ è λ_k, possiamo essere certi che il risultato di una nuova misurazione sarà in $]\alpha', \beta']$. Data l'arbitrarietà di questo intervallo, diremo allora che il risultato **è proprio** λ_k.

Supponiamo ora di aver eseguito la prima misurazione con l'operatore A e di aver trovato il risultato in $]\alpha, \beta]$. Vogliamo eseguire subito dopo, quasi simultaneamente, un altro tipo di misurazione, alla quale è associato un operatore B. Fissiamo quindi un altro intervallo $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ e ci chiediamo se il risultato della nuova misurazione sia in $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$. Se effettivamente il risultato ottenuto è in tale intervallo, il nuovo vettore di stato sarà

$$f'' = \frac{(P_B(\tilde{\beta}) - P_B(\tilde{\alpha}))(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f}{||(P_B(\tilde{\beta}) - P_B(\tilde{\alpha}))(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f||} \, .$$

Ci poniamo ora una domanda: se subito dopo questa seconda misurazione ripetiamo la misurazione fatta all'inizio, con l'operatore A, siamo ancora sicuri di trovare il risultato in $]\alpha, \beta]$? La questione dipende in modo cruciale dal fatto che gli operatori A e B commutino oppure no. Se commutano, allora tutte le proiezioni delle due famiglie spettrali commutano e, in questo caso, siccome $(P_A(\beta) - P_A(\alpha))^2 = (P_A(\beta) - P_A(\alpha))$, la probabilità

$$\Pi'' = \left\| (P_A(\beta) - P_A(\alpha)) \frac{(P_B(\tilde{\beta}) - P_B(\tilde{\alpha}))(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f}{||(P_B(\tilde{\beta}) - P_B(\tilde{\alpha}))(P_A(\beta) - P_A(\alpha))f||} \right\|^2$$

di trovare il nuovo risultato ancora in $]\alpha, \beta]$ è proprio 1. Altrimenti, questa probabilità in genere è minore di 1.

Esempio 3. L'operatore di posizione

$$(Ag)(x) = xg(x)$$

e l'operatore di momento

$$B = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$$

non commutano. Questo fatto è all'origine del **principio di indeterminazione** di Heisenberg, secondo il quale non è possibile misurare simultaneamente posizione e momento con precisione grande quanto si vuole.