

1 Le Basi Fenomenologiche della Meccanica Quantistica

1.1 Cenni storici

Verso la metà dell'ottocento la Fisica sembrava avere raggiunto un assetto definitivo, basato su due grandi pilastri: da un lato la *Meccanica*, iniziata da Galileo, costruita da Newton e portata a maturità dai grandi fisici matematici di fine settecento e dell'ottocento quali Lagrange, Hamilton, Jacobi, Poisson etc.. Dall'altro lato *L'Elettromagnetismo* che Maxwell aveva portato alla perfezione con le sue celebri equazioni (1855).

Tipicamente la Meccanica concerne le *particelle* considerate come oggetti puntiformi la cui traiettoria è determinata dalle coordinate $x_i(t)$, ($i = 1, 2, 3$), che soddisfano equazioni differenziali del secondo ordine in t . Dunque, conoscendo le condizioni iniziali, cioè posizione e impulso all'istante iniziale e risolvendo le equazioni del moto, si possono determinare posizione e impulso ad ogni istante futuro (o passato). Inoltre, poiché le grandezze fisiche sono funzioni di posizione e impulso, si può prevedere con esattezza, almeno in linea di principio, il risultato della misura di ogni grandezza fisica fatta a un generico istante. Questo paradigma si può applicare anche ad altri casi (esempio: corpi rigidi) usando coordinate generalizzate etc.. Una caratteristica tipica dei sistemi meccanici é quindi la possibilità di determinare la *traiettoria* delle particelle componenti, conoscendo posizione e impulso iniziali e risolvendo le equazioni del moto.

L'elettromagnetismo, invece, ha a che fare con *onde*, descritte da *campi* funzioni di x, y, z, t , che soddisfano ad equazioni differenziali alle derivate parziali. Di nuovo, conoscendo le condizioni iniziali (i valori di certi campi al tempo iniziale) e risolvendo le equazioni di campo, si possono determinare i campi a ogni istante e quindi prevedere il risultato della misura di qualunque grandezza del sistema. Anche questo paradigma si può applicare ad altri sistemi, per esempio onde sonore etc.. A causa del principio di sovrapposizione, un aspetto tipico delle teorie delle onde sono i fenomeni di *interferenza* (diffrazione, polarizzazione etc.).

Nella seconda metà dell'ottocento l'ipotesi atomica si affermò sempre più (ricordiamo la prima misura del numero di Avogadro, fatta da Lodschmidt (1865) e le esperienze di Perrin sul moto Browniano (1907)) e i fisici cominciarono ad avventurarsi nel campo della fisica atomica. Fu come aprire un vaso di Pandora. Vennero scoperti nuovi fenomeni e rivelati nuovi oggetti inaspettati. Nel 1895 Roentgen scopre i raggi X. L'anno dopo Curie scopre la radioattività che si presenta con l'emissione di raggi α, β e γ . Nel 1897 Thompson scopre l'elettrone, la cui carica viene misurata da Millikan, più tardi, nel 1910. Dapprima questi nuovi oggetti sembravano potersi inquadrare in uno o nell'altro dei due paradigmi di cui sopra: i raggi X (e i raggi γ ;

ma questo si capì solo più tardi) sono onde elettromagnetiche (luce) di alta (e altissima per i γ) frequenza (Von Laue nel 1912 scopre la diffrazione dei raggi X su cristalli). I raggi α e β si rivelarono essere rispettivamente nuclei di elio e elettroni e quindi da classificare come particelle etc.. Perciò la convinzione generale era che anche i nuovi fenomeni che si andavano scoprendo prima o poi avrebbero trovato spiegazione nell'ambito dei due paradigmi di particelle e onde.

1.2 Il dualismo onda-corpuscolo

Ma poi le cose si complicarono. Oggetti come la luce, che senza ombra di dubbio erano classificati come onde, in certe circostanze presentavano comportamenti tipici delle particelle, incompatibili col modello ondulatorio e viceversa oggetti come l'elettrone che senza alcun dubbio erano da considerarsi come particelle, in certe circostanze presentavano comportamenti ondulatori, incompatibili col modello corpuscolare. In tali circostanze, onde di frequenza ν (o pulsazione ω) e lunghezza d'onda λ (o numero d'onda \vec{k}) si comportavano come particelle di energia E e impulso \vec{p} e viceversa dove il legame tra grandezze particellari e ondulatorie era dato dalle relazioni di de Broglie:

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda}\vec{n} = \hbar\vec{k},$$

dove \vec{n} è il versore nella direzione di \vec{p} e h è una costante con le dimensioni di un'azione (costante di Planck) che vale

$$h = 6,626 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec},$$

ovvero

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$$

Questo comportamento duale di radiazione e materia viene indicato col nome di *dualismo onda-corpuscolo*. Vediamo più in dettaglio i principali fatti che hanno portato a tale dualismo.

1.3 Comportamento corpuscolare delle onde (luce)

1.3.1 Il corpo nero

Per definizione il corpo nero è un corpo che assorbe tutta la radiazione che riceve. In buona approssimazione un corpo nero è la superficie di un piccolo foro praticato in un'ampia cavità: la luce che penetra nella cavità attraverso il foro ha scarsissima probabilità di essere riemessa!

All'interno della cavità vi è radiazione elettromagnetica in equilibrio termodinamico a temperatura T . Sia $u(\nu, T)$ la densità di energia per la radiazione di frequenza ν . Sperimentalmente si misura il potere emissivo $e(\nu, T)$, cioè l'energia irradiata dal foro, per unità di superficie, di frequenza e di tempo. Questa è proporzionale a $u(\nu, T)$ e la distribuzione spettrale di $u(\nu, T)$ è mostrata in fig.1. La previsione teorica, basata sulle leggi dell'elettromagnetismo classico, è in grave disaccordo con tale curva. Essa infatti prevede una distribuzione spettrale che è in accordo con la curva sperimentale per basse frequenze ma diverge per frequenze elevate.

Accade raramente che una curva sperimentale sia direttamente causa di una rivoluzione scientifica. Nell'anno 1900 si verificò uno di questi eventi di rilevanza del tutto eccezionale: Planck formula un'ipotesi rivoluzionaria, incompatibile con la fisica classica. Egli infatti assunse che la radiazione, in equilibrio termodinamico all'interno della cavità, di frequenza ν , possa avere solo energie che siano multipli interi del "quanto" $h\nu$. Con tale ipotesi e usando semplici procedimenti di meccanica statistica, ottenne per u l'espressione

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{(e^{\beta h\nu} - 1)},$$

(dove $\frac{1}{\beta} = k_B T$ e k_B è la costante di Boltzmann) in ottimo accordo con la curva sperimentale.

1.3.2 L'effetto fotoelettrico

Se si illumina la superficie di un metallo alcalino con della luce di frequenza ν si osserva l'emissione di elettroni. Tale effetto, in sé, non è sorprendente dal punto di vista della fisica classica. Infatti la luce possiede un'energia (proporzionale alla sua intensità) e gli elettroni del metallo possono assorbire tale energia, vincere l'energia di legame che li lega al metallo ed essere emessi. Tuttavia, dal punto di vista classico, ci si aspetta che l'energia cinetica degli elettroni emessi cresca con l'intensità della luce incidente. Inoltre se l'intensità della luce è molto piccola ci si aspetta che l'emissione avvenga solo dopo un certo tempo, affinché gli elettroni possano assorbire sufficiente energia per vincere l'energia di legame. Entrambe queste previsioni classiche sono in disaccordo con l'esperienza:

- i) L'energia degli elettroni emessi cresce con la frequenza della luce secondo la legge

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W$$

- ii) Ciò che aumenta con l'intensità della luce è il numero di elettroni emessi.

iii) Gli elettroni sono emessi subito fin dall'inizio dell'illuminazione anche se debole (Meyer-Gerlach, 1914).

Nel 1905 Einstein spiega tali leggi dell'effetto fotoelettrico estendendo l'ipotesi di Planck, assumendo cioè che la luce di frequenza ν sia formata da corpuscoli di energia $h\nu$, detti fotoni, che vengono assorbiti dagli elettroni uno alla volta. La legge di cui al punto i) è semplicemente la legge di conservazione dell'energia, dove W rappresenta l'energia di legame.

1.3.3 L'effetto Compton

Nel 1924 Compton scopre sperimentalmente che nella diffusione di raggi X, di lunghezza d'onda λ , su elettroni liberi (o debolmente legati) e fermi, la radiazione diffusa ha una lunghezza d'onda λ' , maggiore di λ , secondo la legge:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \quad (1)$$

dove θ è l'angolo tra le direzioni della radiazione incidente e diffusa. Per la fisica classica non ci dovrebbe essere nessun cambiamento di lunghezza d'onda con elettroni fermi (anche da un punto di vista classico nel caso di elettroni in moto c'è una variazione di λ per effetto Doppler, ma con legge completamente diversa). La (1), invece, è facilmente spiegabile se si pensa al processo come dovuto ad un semplice urto elastico tra un elettrone, fermo, di massa m e un corpuscolo, fotone, di massa nulla e impulso ed energia dati dalle relazioni di de Broglie. Bisogna imporre la conservazione di energia e impulso nell'urto, ma usando le formule della cinematica relativistica (ricordiamo che per una particella di massa M e impulso q , l'energia è $E = \sqrt{(qc)^2 + (Mc^2)^2}$). Dunque:

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{P}',$$

$$mc^2 + pc = \sqrt{(P'c)^2 + (mc^2)^2} + p'c,$$

dove \vec{p} è l'impulso del fotone prima dell'urto e \vec{p}' e \vec{P}' sono gli impulsi del fotone e dell'elettrone dopo l'urto. Da queste due equazioni si ricava

$$P'^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta,$$

e

$$P'^2 + (mc)^2 = (mc - p - p')^2,$$

e quindi, eliminando P'^2 tra queste si trova

$$mc \frac{(p - p')}{pp'} = (1 - \cos \theta),$$

che, usando la relazione di de Broglie, che lega l'impulso alla lunghezza d'onda, riproduce la (1).

1.4 Il comportamento ondulatorio delle particelle (elettroni)

1.4.1 Diffrazione degli elettroni

La verifica diretta delle proprietà ondulatorie degli elettroni è stata ottenuta da Davisson e Germer, che osservano il fenomeno della diffrazione in accordo col dualismo, bombardando un cristallo di nichel con un fascio di elettroni di 54 eV. Ma per questo bisognò aspettare il 1927.

1.4.2 Spettroscopia atomica

Tuttavia indicazioni indirette di proprietà ondulatorie degli elettroni esistevano assai prima, anche se, prima di Rutherford, Bohr, de Broglie non erano apprezzate come tali. Mi riferisco a tutta la mole di dati sulla spettroscopia atomica. Come noto, ogni atomo emette (ed assorbe) uno spettro di luce con righe spettrali (frequenze) che sono caratteristiche dell'atomo stesso. Le righe emesse (e assorbite) soddisfano a regole empiriche molto semplici. Per esempio, per l'idrogeno, le frequenze sono date dalla regola empirica di Balmer:

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

dove n e m sono numeri naturali ed R la costante di Rydberg. Per altri elementi la formula è meno semplice, ma vale in ogni caso la regola di composizione di Rydberg-Ritz (1905): Ogni atomo è caratterizzato da una serie di numeri T_n , detti termini spettrali, tali che le frequenze caratteristiche sono date da $\nu_{nm} = T_n - T_m$.

Nel 1911 Rutherford, con le sue celebri esperienze ottenute bombardando con raggi α diversi materiali, fornisce un modello dell'atomo di tipo planetario; l'atomo risulta costituito da un nucleo centrale di carica elettrica, positiva, Ze e di dimensioni di circa 10^{-13} cm e Z elettroni (dimensioni dell'atomo: circa 10^{-8} cm). Finalmente nel 1913 Bohr riesce a spiegare la spettroscopia atomica con una ipotesi rivoluzionaria e incompatibile con la fisica classica. Bohr postula che gli elettroni nell'atomo possano trovarsi solo in stati di determinate energie, E_i , (livelli energetici, che Bohr determina con ragionamenti semiclassici). L'esistenza di livelli energetici discreti per gli atomi è stata confermata (1914) dall'esperienza di Franck e Hertz sugli urti anelastici di elettroni sugli atomi.

Quando un atomo passa da un livello eccitato di energia E_i a uno piú basso, di energia E_j , emette un quanto di luce di frequenza ν tale che

$$h\nu = E_i - E_j, \quad (2)$$

(e viceversa lo assorbe se, illuminato, passa da E_j a E_i). Si noti che da un punto di vista classico l'esistenza di stati energetici stazionari, cioè orbite stazionarie, per gli elettroni è insostenibile: gli elettroni, essendo carichi e avendo accelerazione centripeta, dovrebbero irraggiare perdendo energia e finendo per cadere nel nucleo. L'atomo sarebbe instabile. Viceversa stati stazionari sono completamente plausibili in un modello ondulatorio, corrispondendo a onde stazionarie.

Vediamo allora, (con un ragionamento ingenuo e semiclassico e quindi in realtà contraddittorio) come, utilizzando il dualismo onda-corpuscolo, si possa seguendo Bohr spiegare la legge di Balmer per l'idrogeno. Supponiamo che l'elettrone (massa m e carica elettrica $-|e|$) compia un'orbita circolare intorno al nucleo di raggio r e quindi di energia

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}. \quad (3)$$

Eguagliando la forza coulombiana e quella centrifuga si ha

$$\frac{e^2}{r^2} = m\omega^2 r = \frac{p^2}{mr},$$

ovvero

$$\frac{e^2}{r} = \frac{p^2}{m}. \quad (4)$$

che inserita nella (3) fornisce

$$E = -\frac{p^2}{2m} = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{e^4}{2r^2} \frac{r}{e^2} = -\frac{me^4}{2r^2 p^2}. \quad (5)$$

Associando all'elettrone un'onda in base al dualismo onda corpuscolo e richiedendo che questa onda sia stazionaria si ha

$$2\pi r = n\lambda = \frac{hn}{p},$$

cioé

$$pr = \hbar n$$

dove n è un intero e quindi la (5) diventa

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2 n^2}.$$

Da questa e dalla (2) si ottiene la legge di Balmer in ottimo accordo anche quantitativo con il valore della costante di Rydberg.

1.5 La “contraddizione” insita nel dualismo

Il dualismo onda-corpuscolo mise in crisi la fisica classica perché vi è una intrinseca contraddizione tra il concetto classico di particella e il concetto classico di onda. Dunque se gli oggetti della fisica non possono essere nello stesso tempo onde classiche e corpuscoli classici dovranno essere oggetti di nuovo tipo, *oggetti quantistici* appunto, per i quali bisogna costruire una nuova fisica. Per renderci conto delle caratteristiche salienti di questi oggetti quantistici è utile analizzare la nota esperienza dei fori di Yang.¹ Ciò che ci insegna l’esperienza dei fori di Yang è che, se entrambi i fori sono aperti, gli oggetti quantistici, come le onde classiche, ma a differenza delle particelle classiche, presentano il fenomeno dell’interferenza; tuttavia, come le particelle classiche e a differenza delle onde classiche, arrivano sullo schermo una alla volta. Anche se la sorgente è così debole che tra sorgente e schermo viaggia un solo oggetto alla volta, diciamo un elettrone, quando sullo schermo si sono accumulate molti elettroni si osserva ancora un fenomeno di interferenza (l’oggetto quantistico interferisce anche con se stesso!). Ciò significa che l’onda associata all’oggetto quantistico è un’onda di probabilità, non di intensità. Inoltre, l’esperienza dei fori di Yang ci dice che se ci si ingegna a modificare le cose fino a determinare da che foro è passato l’oggetto quantistico, l’interferenza viene distrutta. A questo punto è chiaro qual’è la contraddizione tra onda e corpuscolo (classici). Si tratta della contraddizione tra *interferenza* tipica del modello ondulatorio classico e *traiettoria* tipica del modello corpuscolare classico.

1.6 Relazioni di indeterminazione di Heisenberg

Poiché, in linea di principio, una volta note posizione e impulso iniziali di una particella, la sua traiettoria è determinabile, si può risolvere la contraddizione se si assume che gli oggetti quantistici sono sì corpuscoli, nel senso che producono effetti localizzati, ma per essi non si possa misurare contemporaneamente e con precisione assoluta posizione e impulso. Più precisamente modello corpuscolare e ondulatorio diventano compatibili se si assumono le *relazioni di indeterminazione di Heisenberg* nella forma:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar,$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{1}{2} \hbar,$$

¹Per la discussione dei fori di Yang si veda il libro di G.F. Sartori.

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{1}{2} \hbar,$$

dove Δx , Δy e Δz (Δp_x , Δp_y e Δp_z) rappresentano le indeterminazioni nelle misure delle componenti della posizione (dell'impulso) lungo gli assi x , y e z , a un dato istante. Il perché a secondo membro di tali relazioni compaia proprio \hbar segue da un teorema generale sulle trasformate di Fourier tenendo conto delle relazioni di de Broglie. Ricordiamo che sovrapponendo onde piane con numero d'onda medio \vec{k}_o e larghezza $\Delta \vec{k}$ si possono ottenere pacchetti d'onda localizzati intorno a \vec{x}_o con larghezza $\Delta \vec{x}$ ovvero

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}).$$

Un teorema sulle trasformate di Fourier implica che

$$\Delta x_i \Delta k_{x_i} \geq \frac{1}{2},$$

dove $\Delta \vec{x}$ ($\Delta \vec{k}$) sono le fluttuazioni intorno al valor medio relative ai profili $f(\vec{x})$ ($\tilde{f}(\vec{k})$). Moltiplicando queste diseguaglianze per \hbar e tenendo presenti le rel. di de Broglie, si ottengono le relazioni di indeterminazione di Heisenberg (Rel. di I.).

Chiaramente le rel. di I. rendono compatibili le descrizioni corpuscolare e ondulatoria. Ma chi ci assicura che qualche esperimento non permetta di ottenere una conoscenza simultanea di posizione e impulso che violi le rel. di I.? La risposta è: il dualismo onda-corpuscolo. Se si analizza qualunque esperimento per ottenere una conoscenza simultanea di posizione e impulso, tenendo presente il dualismo onda-corpuscolo, si trova che le rel. di I. non possono essere violate. Non solo le rel. di I. proteggono il dualismo dalla contraddizione insita nei concetti classici di onda e corpuscolo, ma anche, viceversa, il dualismo protegge le rel. di I. dalla possibilità di essere violate sperimentalmente.

Per convincercene analizziamo uno di tali esperimenti. Supponiamo di avere una particella con impulso inizialmente noto con precisione assoluta, dato da $p_x = p$ e $p_y = 0 = p_z$ per cui $\Delta \vec{p} = 0$ e misuriamo la coordinata y facendo passare la particella attraverso una fenditura di larghezza d posta lungo l'asse y , e osservandola su uno schermo. Subito dopo la misura la coordinata y della particella risulta determinata con una indeterminazione $\Delta y = d$. Poiché subito prima della misura $\Delta p_y = 0$, abbiamo forse violato le Rel. di I.? No! Infatti per il dualismo, la particella si comporta come un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{h}{p}$ e quindi, passando per la fenditura, subisce una diffrazione con angolo di diffrazione dato da $\sin \alpha \cong \frac{\lambda}{d}$. Pertanto ora la particella ha una direzione compresa nel semicono di apertura α e asse x e quindi p_y ora

ha una indeterminazione

$$\Delta p_y = p \sin \alpha = \frac{h \lambda}{\lambda d} = \frac{h}{d}.$$

Pertanto

$$\Delta y \Delta p_y \cong h.$$