1 Teoria della Misura

La teoria della misura in Meccanica Quantistica é il capitolo della Meccanica Quantistica piú controverso e dibattuto.

Il punto é che il processo di misura in M.Q. consiste sempre nell'interazione tra il sistema quantistico, microscopico, in esame e l'apparato di misura che é un sistema macroscopico (per il quale le leggi classiche sono un'ottima approssimazione). Voler descrivere in dettaglio tale interazione con le leggi della M.Q. é difficile, sia dal punto di vista pratico per la complessita del sistema macroscopico rappresentato dall'apparato di misura, sia dal punto di vista concettuale. [Discutere queste difficolta' concettuali esula dai limiti e dalle possibilitá di questo corso: mi limiteró a dire che il problema maggiore consiste nel fatto che nell'atto della misura apparentemente vi é una transizione da uno stato puro del sistema totale (sistema quantistico + apparato di misura) a una miscela statistica e descrivere tale transizione non é agevole].

Un'altra fonte di difficoltá, per alcuni, della teoria della misura in M.Q. consiste in un paradosso, noto come il paradosso della *riduzione del pacchetto*, che discuteremo piú avanti.Tuttavia tale supposta difficoltá, a mio avviso, ha motivazioni piú ideologiche, legate a una concezione "realistica" della fisica non necessaria per l'interpretazione della M.Q..

La trattazione usuale del processo di misura, che viene presentata nei testi, in realtá aggira il problema di descrivere in dettaglio l'interazione sistema-apparato di misura e si limita a prendere in considerazione una classe idealizzata di processi di misura per i quali si puó dire a priori tutto quello che serve, senza entrare nel merito dell'interazione sistema-apparato che avviene nell'atto della misura.

Anche nelle trattazioni usuali della meccanica classica si considerano di solito misure idealizzate, atte a determinare le condizioni iniziali del sistema o a misurare una grandezza a un dato istante: si assume infatti che le misure siano a) prive di errore sperimentale; b) istantanee; c) tali da non perturbare lo stato del sistema o la grandezza da misurare.

Naturalmente le misure reali non sono esenti da errori, durano un tempo finito e disturbano il sistema in esame, ma le assunzioni a), b) e c) sono giustificate perché, in fisica classica, non c'é nessuna ragione concettuale per pensare che l'errore sperimentale, la durata della misura e il disturbo di questa sul sistema non possano essere resi piccoli a piacere.

Per la stessa ragione anche in M.Q. si puó assumere che le misure siano esenti da errori ed istantanee, ma, a causa delle relazioni di indeterminazione, non é lecito assumere che il disturbo sul sistema dovuto all'interazione sistema-apparato di misura possa essere piccolo a piacere e l'assunzione c) va abbandonata.

La classe di misure che viene presa in considerazione in M.Q. per descrivere il processo di misura é la classe delle *misure di prima specie* (oltre che istantanee ed esenti da errore sperimentali): una sottoclasse di queste sono le *misure ideali di prima specie* che, come vedremo, sono le misure in cui il disturbo sul sistema é, per cosí dire, il piú piccolo possibile.

D'ora in poi, quando parleremo di *misure di prima specie* intenderemo sempre *di prima specie, istantanee ed esenti da errori sperimentali.*

La definizione di *misura di prima specie* é di carattere operativo. Supponiamo di misurare all'istante t una grandezza $\mathcal{A}$ che per il momento, per semplicitá, assumiamo a spettro puramente discreto e supponiamo di avere trovato il valore $a_n \in Sp(A)$. La misura é detta di prima specie se, rimisurando la grandezza $\mathcal{A}$ in un istante immediatamente successivo, si ritrova a_n con certezza e ció per qualunque punto dello spettro. Si noti che é importante la precisazione "immediatamente successivo", perché se si aspetta del tempo a fare la seconda misura lo stato puó essersi modificato per evoluzione temporale.

Prima di estendere la definizione di misura di prima specie al caso in cui $\mathcal{A}$ abbia spettro continuo (o misto), conviene fare una premessa.

Se $\mathcal{A}$ ha spettro discreto, si possono fare due tipi di misure. Misure (che chiameremo, per intenderci, di tipo A) in cui i possibili risultati della misura sono i punti $a_n \in Sp(A)$ dello spettro di $\mathcal{A}$. (Sono queste le misure che abbiamo preso in considerazione nella definizione di misure di prima specie per grandezze con spettro discreto). Oppure possiamo fare misure (che chiameremo di tipo B) dirette a stabilire se il risultato della misura si trova in un intervallo Δ dell'asse reale. Queste sono misure di tipo si/no in cui, piuttosto che la grandezza $\mathcal{A}$, quelle che si misurano sono le grandezze, funzioni di $\mathcal{A}$, descritte dagli operatori di proiezione $Q_\Delta(A) \equiv \theta_\Delta(A)$, dove $\theta_\Delta(x)$ é la funzione che vale 1 se $x \in \Delta$ e 0 altrove. Questi sono operatori a.a. (e quindi rappresentano osservabili) con autovalori 0 e 1: si ha autovalore 1 se la risposta della misura é stata "si! il risultato della misura si trova nell'intervallo Δ" e si ha autovalore 0 se la risposta della misura é stata "no! il risultato della misura non si trova nell'intervallo Δ".

Se $\mathcal{A}$ ha spettro continuo, misure di tipo A non sono ammesse: infatti se $a \in Sp(A)$ é un punto dello spettro continuo di $\mathcal{A}$ non esistono autostati in cui la probabilitá di trovare il valore a é 1 cioé é la certezza; anzi, poiché il singolo punto a costituisce un insieme di misura nulla dello spettro di $\mathcal{A}$, la probabilitá di trovare il singolo risultato a nella misura, é nulla. Sono invece possibili misure di tipo B.

Premesso ció possiamo ora estendere al caso di grandezze con spettro continuo la definizione di misura di prima specie.

Supponiamo di avere fatto all'istante t una misura (di tipo B), atta a stabilire se la misura della grandezza $\mathcal{A}$ fornisce un risultato contenuto nell'intervallo Δ e aver trovato che la risposta é affermativa (negativa)(cioé supponiamo di avere misurato la grandezza $\theta_\Delta(A)$ e avere trovato l'autovalore 1 (l'autovalore 0)). Allora la misura sara' di prima specie, se ripetendo la stessa misura immediatamente dopo si ritrova con certezza che la risposta é affermativa (negativa) (cioé l'autovalore 1 (l'autovalore 0) di $\theta_\Delta(A)$) e questo per ogni intervallo Δ cioé per ogni $\theta_\Delta(A)$.

Misure che non sono di prima specie si dicono di seconda specie. Forse vale la pena di fare un esempio di misura di prima specie e uno di misura di seconda specie.

Misura di prima specie: misura di posizione mediante un microscopio. Affinché una particella sia localizzata bisogna che un fotone collidente con essa sia deviato nell'oculare di un microscopio. Dopo un tempo infinitesimo dt, anche se l'impulso della particella nell'urto col fotone é variato di un quantitá finita Δp, la posizione varia di $\Delta p dt/m$ cioé praticamente non varia

Misura di seconda specie: Misura dell'impulso di una particella carica mediante un campo magnetico: la direzione dell'impulso viene modificata dalla misura .

La teoria della misura in M.Q. si propone di rispondere a queste due domande:

1. *Qual'é l'effetto di una misura sullo stato del sistema ?*

2. *Quali e quante misure , contemporanee a un certo istante $t_\circ$, bisogna fare sul sistema per potere determinare (o come si usa dire "preparare ") lo stato del sistema all'istante $t_\circ$*

Vedremo che per le misure di prima specie si puó rispondere a queste due domande in modo esauriente mentre per le misure di seconda specie non si puó dire niente a priori. Dunque d'ora in poi prenderemo in considerazione solo misure di prima specie.

1.1 L'effetto della misura. Misure di prima specie e misure ideali di prima specie

L'effetto di una misura di prima specie sullo stato di un sistema é una conseguenza immediata della definizione stessa di misura di prima specie. Supponiamo dapprima che la grandezza $\mathcal{A}$ che si misura abbia spettro puramente discreto e ricordiamo che, se il sistema si trova in uno stato in cui la probabilitá di ottenere il risultato $a \in Sp(A)$ in una misura di $\mathcal{A}$ é 1 (certezza), vuol dire che il sistema si trova in un autostato di A relativo all'autovalore a. Supponiamo che il sistema all'istante $t_\circ$ si trovi nello stato (descritto dal vettore) $|\psi_{t_\circ}>$ e che la misura, di prima specie, fatta all'istante $t_\circ$, abbia dato il risultato $a_n \in Sp(A)$. Allora, poiché nel nostro caso se si rifacesse la stessa misura in un istante immediatamente successivo a $t_\circ$ si troverebbe di nuovo a_n con certezza, ne segue che immediatamente dopo la misura il sistema si trova in uno stato $|\phi_{a_n} >$ appartenente all'autospazio $\mathcal{H}_{a_n}$ relativo all'autovalore a_n di A. Dunque l'effetto di una misura di prima specie di $\mathcal{A}$, fatta all'istante $t_\circ$, col risultato a_n, é quello di far "saltare" il sistema dallo stato $|\psi_{t_\circ} >$ in cui si trova immediatamente prima della misura, allo stato $|\phi_{a_n} >\in \mathcal{H}_{a_n}$ immediatamente dopo.

Se $\mathcal{H}_{a_n}$ é non degenere (ossia consiste in un solo raggio vettore) $|\phi_{a_n} >$ é completamente determinato. Ma in generale, se indichiamo con $|a_n, r >$ una base completa ortonormalizzata di $\mathcal{H}_{a_n}$, lo stato subito dopo la misura sará descritto dal vettore

$$|\phi_{a_n} >= \sum_r c^{(r)} |a_n, r > \tag{1}$$

e sui coefficenti $c^{(r)}$ non si puó dire nulla a priori. Infatti se, in base alla completezza dell'operatore autoaggiunto A, sviluppiamo lo stato $|\psi_{t_\circ} >$ in autostati di A;

$$|\psi_{t_\circ} >= \sum_{a_n \in Sp(A)} |\psi_{a_n} >$$

con

$$|\psi_{a_n} >= \sum_r |a_n, r >< a_n, r|\psi_{t\circ} > \tag{2}$$

la misura, pur di prima specie, puó aver deformato o sfasato i cefficenti $< a_n, r|\psi_{t\circ} >$ in (2) in modo incontrollabile.

Tuttavia non c'é nessuna ragione concettuale per pensare che questa deformazione o questo sfasamento non possa essere piccolo a piacere. Allora possiamo considerare una sottoclasse delle misure di prima specie, dette *misure ideali di prima specie*, in cui tali deformazioni o sfasamenti sono nulli. In tal caso lo stato subito dopo la misura é dato dalla (2), cioé si ottiene *proiettando* lo stato $|\psi_{t_\circ} >$ sull'autospazio $\mathcal{H}_{a_n}$:

$$|\psi_{a_n} >= Q_{a_n}(A)|\psi_{t_\circ} >$$

dove $Q_{a_n} = \sum_r |a_n, r >< a_n, r|$ é il proiettore sull'autospazio $\mathcal{H}_{a_n}$.

L'estensione al caso in cui $\mathcal{A}$ abbia spettro continuo é ovvia. Nel caso di spettro continuo una misura, tipicamente, ci dice se il risultato osservato si trova o no in un intervallo Δ dello spettro di A. Supponiamo che la misura di prima specie fatta all'istante $t_\circ$ abbia dato un risultato positivo (un risultato negativo), cioé che il risultato si trova (non si trova) nell' intervallo Δ.

Allora vuol dire che il sistema é “saltato” dallo stato $|\psi_{t_\circ}>$ a un autostato $|\phi_\Delta>$ ($|\bar{\phi}_\Delta>$) relativo all’autovalore 1 (all’autovalore 0) del proiettore $\theta_\Delta(A)$. Se poi la misura é ideale di prima specie, lo stato subito dopo la misura si ottiene applicando a $|\psi_{t_\circ}>$ il proiettore $\theta_\Delta(A)$ (il proiettore $\theta_{\bar{\Delta}}(A) = 1 - \theta_\Delta(A)$).

Posiamo ora enunciare quello che possiamo chiamare il IV assioma della M.Q.

Assioma IV

Per ogni osservabile A esistono misure di prima specie e, in particolare, misure ideali di prima specie: l’effetto di una misura di prima specie é quello di portare lo stato prima della misura, in uno stato, subito dopo la misura, che appartiene all’autospazio relativo al risultato della misura trovato.

Inoltre, se la misura é *ideale di prima specie*, chiamando $|->$ lo stato subito prima della misura e $|+>$ lo stato subito dopo la misura, allora

a) se la misura ha trovato come risultato il valore a_n dello spettro discreto di A l’effetto della misura é quello di proiettare $|->$ in

$$|-> \qquad \Longrightarrow \qquad |+>= Q_{a_n}(A)|-> \tag{3}$$

dove Q_{a_n} é il proiettore sull’autospazio $\mathcal{H}_{a_n}$;

b) Se invece (sia nel caso di spettro continuo che discreto) si é eseguita una misura di tipo si/no, atta a rivelare se il sistema ha un valore della grandezza A contenuto in un intervallo Δ dello spettro di A, allora l’effetto della misura é quello di proiettare $|->$ in

$$|-> \qquad \Longrightarrow \qquad |+>= \theta_\Delta(A)|-> \tag{4}$$

se la risposta é stata “si” o in

$$|-> \qquad \Longrightarrow \qquad |+>= (1-\theta_\Delta(A))|-> \tag{5}$$

se la risposta é stata “no”.(Si noti che $\theta_\Delta(A)$ e $(1-\theta_\Delta(A))$ sono proiettori). In conclusione le misure ideali di prima specie agiscono come filtri perfetti.

L’effetto delle misure ideali di prima specie porta al cosidetto paradosso della *riduzione del pacchetto.*

Consideriamo la grandezza “posizione” di un particella (data dagli operatori a.a. X, Y, Z) e supponiamo che in rappresentazione $\vec{\mathcal{X}}$ lo stato del sistema all’istante $t_\circ$ sia descritto dalla funzione d’onda $\psi(\vec{x})$. Supponiamo di eseguire all’istante $t_\circ$ una misura ideale di prima specie di posizione (per esempio con un contatore Geiger) atta a stabilire se la particella si trova o no in un volume ΔV. Si noti che la funzione d'onda $\psi(\vec{x})$ puó essere sensibilmente diversa da zero anche in regioni lontane da ΔV. Se la misura ha dato un risultato positivo cioé se il contatore Geiger é scattato e ha trovato la particella nel volume ΔV, in base alla (3) l'atto della misura ha fatto "collassare" la funzione d'onda annullandola fuori del volume ΔV. L'aspetto "paradossale" sta nel fatto che questa misura, localizzata in ΔV, ha prodotto effetti anche in regioni lontane da ΔV. Se invece il contatore (che ovviamente supponiamo perfetto) non é scattato e quindi ha trovato che la particella non sta in ΔV, egualmente la misura ha prodotto un effetto perché ha annnullato la funzione d'onda in ΔV. In questo caso la cosa é forse anche piú paradossale perché l'apparato di misura ha prodotto l'effetto anche senza" interagire" con la particella che "non c'era".

A mio avviso, la difficoltá che incontrano alcuni nell'accettare questo "paradosso" dipende dall'interpretazione "realistica" che essi danno alla funzione d'onda. Se si considera la funzione d'onda, non come una proprietá intrinseca del sistema, ma come la codificazione dell'informazione che noi abbiamo sul sistema l'aspetto paradossale scompare. D'acccordo, il fatto che questa "informazione" si comporti ed evolva secondo le leggi della M.Q. é strano, se volete, ma anche affascinante e del tutto coerente sul piano razionale.

1.2 Quali misure? Osservabili compatibili

Se la misura (di prima specie) della grandezza $\mathcal{A}$ (spettro discreto) ha dato il risultato $a_n \in Sp(A)$ allora $|+ > \in \mathcal{H}_{a_n}$ e se $\mathcal{H}_{a_n}$ é non degenere lo stato dopo la misura é completamente determinato. Ma se $\mathcal{H}_{a_n}$ é degenere lo stato non é determinato e bisogna fare misure di altre grandezze, contemporaneamente alla misura di $\mathcal{A}$, per determinarlo.

Ma quali grandezze ?

Chiaramente dovremo misurare osservabili la cui misura non modifica l'informazione che abbiamo sulla grandezza $\mathcal{A}$. Tali osservabili si diranno *compatibili* con $\mathcal{A}$.

Anche qui iniziamo con una definizione operativa di *compatibilitá.* Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due osservabili con spettro puramente discreto; supponiamo di avere fatto all'istante t una misura di prima specie di $\mathcal{A}$ e di avere trovato come risultato $a_n \in Sp(A)$ e, ad un istante immediatamente successivo, t^+, di avere misurato (con misura di prima specie) $\mathcal{B}$ e di avere trovato $b_m \in Sp(B)$. Diremo che *B é compatibile con A* se, rimisurando $\mathcal{A}$ ad un istante immediatamente successivo, t^{++}, si riottiene con certezza lo stesso risultato di prima, a_n, e ció per qualunque $a_n \in Sp(A)$ e $b_m \in Sp(B)$.

Da questa definizione segue che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno *un sistema completo di autovettori comuni* .

Infatti: poiché A é autoaggiunto, $\forall|\psi> \in \mathcal{H}$,

$$|\psi>= \sum_{a_n \in Sp(A)} |\phi_{a_n}> \tag{6}$$

dove $|\phi_{_n}>$ sono le proiezioni di $|\psi>$ in $\mathcal{H}_{a_n}$: ma poiché anche B é autoaggiunto possiamo sviluppare ognuno dei kets $|\phi_{a_n}>$ in autostati di B:

$$|\phi_{a_n}>= \sum_{\beta_m \in Sp(B)} |\phi_{b_m}, (a_n)> \tag{7}$$

dove abbiamo introdotto la notazione $|\phi_{b_m}, (a_n)>$ per indicare che $|\phi_{b_m}, (a_n)>$ sono autovettori di B con autovalore b_m che provengono dalla proiezione su $\mathcal{H}_{b_m}$ dei kets $|\phi_{a_n}>$; in generale per due operatori A e B, $|\phi_{b_m}, (a_n)>$ non sono autokets di A. Tuttavia se B é compatibile con A

$$|\phi_{b_m}, (a_n)> \equiv |\phi_{a_n, b_m}> \tag{8}$$

sono anche autokets di A; infatti se partiamo da un sistema nello stato $|\psi>$ ed eseguiamo all'istante t una misura ideale di prima specie col risultato a_n, il sistema viene proiettato nello stato $|\phi_{a_n}>$; se poi, all'istante t^+ misuriamo B, sempre con una misura ideale di prima specie, col risultato b_m il sistema viene proiettato nello stato $|\phi_{b_m}, (a_n)>$; infine se all'istante t^{++} si rimisura A si trova a_n con certezza. Ció significa che lo stato $|\phi_{b_m}, (a_n)>$ é anche autostato di A con autovalore a_n, cioé che vale la (8). Sostituendo (8) in (7) e questa in (6) si ha che $\forall|\psi> \in \mathcal{H}$,

$$|\psi>= \sum_{a_n \in Sp(A), b_m \in Sp(B)} |\phi_{a_n, b_m}> \tag{9}$$

La (9) ci dice che $|\phi_{a_n, b_m}>$ formono un sistema completo di autovettori comuni di A e B. Viceversa se esiste un sistema completo di autovettori comuni di A e B, cioé vale la (9), allora B é compatibile con A. Infatti misurando con misure ideali di prima specie, prima A con risultato a_n e immediatamente dopo B con risultato b_m, il sistema é proiettato in $|\phi_{a_n, b_m}>$ e quindi se immediatamente dopo si rimisura A si ritrova con certezza a_n. Lo stesso ragionamento si puó fare scambiando A con B e quindi ne segue che se B é compatibile con A anche A é compatibile con B. La nozione di compatibilitá é commutativa.

Abbiamo dunque dimostrato il seguente

Teorema 1.:

Condizione necessaria e sufficente perché due osservabili (a spettro discreto) siano compatibili é che essi ammettano un sistema completo di autovettori comuni.

Un altro modo equivalente di presentare tale teorema é il seguente: due osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, con spettro discreto sono compatibili se e solo se

$$\mathcal{H} = \sum_{a_n \in Sp(A), b_m \in Sp(B)} \oplus \quad \mathcal{H}_{a_n, b_m} \tag{10}$$

dove $\mathcal{H}_{a_n,b_m}$ sono autospazi di A relativi agli autovalori a_n e di B relativi agli autovalori b_m.

Il risultato del *teorema 1* puó essere preso come definizione di osservabili compatibili.

Definizione 1:

Due osservabili a spettro discreto sono compatibili se ammettono un sistema completo di autovettori comuni.

Tale definizione si puó estendere al caso di osservabili con spettro continuo:

Definizione 2:

Due osservabili con spettro continuo sono compatibili se ammettono un sistema completo di autofunzionali comune.

In generale: due osservabili sono compatibili se ammettono un sistema completo di autokets comune.

Un altro teorema che caratterizza la compatibilitá di due osservabili é il seguente:

Teorema 2:

Due osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ con spettro discreto sono compatibili se e soltanto se essi commutano.

Dimostrazione:

a) Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono compatibili vale la (9). Allora

$$AB|\psi> = \sum_{a_n \in Sp(A), b_m \in Sp(B)} a_n b_m |\phi_{a_n,b_m}> = \sum_{a_n \in Sp(A), b_m \in Sp(B)} b_m a_n |\phi_{a_n,b_m}> = BA|\psi>$$

ovvero

$$[A, B]|\psi> = 0$$

b) Viceversa supponiamo che $[A, B] = 0$. Poiché A é autoaggiunto

$$\mathcal{H} = \sum_{a_n \in Sp(A)} \oplus \quad \mathcal{H}_{a_n} \tag{11}$$

Ma, se A e B commutano, $\forall |\phi_{a_n}> \in \mathcal{H}_{a_n}$ si ha

$$AB|\phi_{a_n}> = BA|\phi a_n> = Ba_n|\phi a_n> = a_n B|\phi_{a_n}> \tag{12}$$

La (12) ci dice che $B|\phi_{a_n}> \in \mathcal{H}_{a_n}$ cioé che $\mathcal{H}_{a_n}$ é invariante per B. Allora possiamo considerare la restrizione di B ad $\mathcal{H}_{a_n}$ e questa definisce un operatore autoaggiunto in $\mathcal{H}_{a_n}$ per cui

$$\mathcal{H}_{a_n} = \sum_{b_m \in Sp(B)} \mathcal{H}_{a_n, b_m}$$

dove $\mathcal{H}_{a_n,bm}$ sono autospazi di A e di B relativi agli autovalori a_n e b_m. Inserendo questa in (11) si ottiene la (10).

N.B. A rigore, il teorema vale solo se gli operatori A e B sono limitati, cioé hanno per dominio l'intero spazio $\mathcal{H}$. In genere, vale anche per operatori illimitati ma ci sono casi patologici in cui non vale a causa di problemi di dominio. Perché valga bisogna che il codominio di A contenga il dominio di B e viceversa e che il commutatore $[A,B]$ abbia dominio denso in $\mathcal{H}$. Ad esempio non vale per gli operatori a.a., che pure apparentemente commutano, P e P^2 in $L_2([-a,a])$ in cui P agisce su funzioni periodiche del suo domino naturale e P^2 su funzioni che si annullano agli estremi. E infatti questi operatori non hanno un sistema completo di autovettori comuni e dunque non sono compatibili.

Quanto si é detto per gli operatori con spettro discreto si puó estendere agli operatori a spettro continuo (o misto) sostituendo agli operatori A e B le famiglie di proiettori $\{\theta_\Delta(A)\}$ e $\{\theta_{\Delta'}(B)\}$.

1.3 Quante misure ? Insiemi completi di osservabili compatibili. Rappresentazioni.

Vogliamo ora caratterizzare gli insiemi di osservabili compatibili la cui misura simultanea, di prima specie, permette di determinare ("preparare") lo stato del sistema. Sia $\vec{\mathcal{A}} \equiv (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ...\mathcal{A}_N)$ un insieme di osservabili compatibili, rappresentati dagli operatori a.a. $\vec{A} \equiv (A_1, A_2, ...A_N)$, a spettro discreto. Per quanto detto finora, una misura di prima specie, simultanea degli osservabili $\mathcal{A}_i$ con risultati $a_i \in Sp(A_i)$, $i = 1, 2, ...N$, porta il sistema nell'autospazio $\mathcal{H}_{\vec{a}} \equiv \mathcal{H}_{a_1,a_2,...a_N}$ comune degli A_i relativo agli autovalori a_i. Allora lo stato del sistema sará determinato se l'autospazio $\mathcal{H}_{\vec{a}}$ é non degenere, cioé é formato da un solo raggio vettore: subito dopo la misura lo stato del sistema sará rappresentato dall'unico raggio vettore $|\hat{\phi}_{\vec{a}} >$ in cui consiste $\mathcal{H}_{\vec{a}}$.

Conviene introdurre la seguente

Definizione 3:

Un insieme $\vec{A}$ di osservabili compatibili, (a spettro discreto e/o continuo) si dice *completo* se ammette un insieme completo di autovettori (eventualmente in senso generalizzato) esente da degenerazione.

Chiaramente in questa definizione la parola chiave é "esente da degenerazione": l'equazione agli autovalori

$$A_i|\vec{a} >= a_i|\vec{a} > \qquad i = 1, 2...N \tag{13}$$

ammette una e una sola soluzione e gli autokets $|\vec{a}>$, che possono sempre essere scelti ortonormalizzati (eventualmente in senso generalizzato),

$$<\vec{a},\vec{a}'>=\delta(a,a')$$

forniscono una base completa (eventualmente in senso generalizzato) di $\mathcal{H}$.

Dunque la misura simultanea di un insieme completo di osservabili compatibili, a spettro discreto, determina completamente lo stato del sistema subito dopo la misura.

Nel caso di insiemi completi di osservabili compatibili con spettro continuo si devono considerare le famiglie di operatori di proiezione $\theta_{\Delta_i}(A_i)$ (che sono compatibili se gli osservabili $\vec{\mathcal{A}}$ sono compatibili). Se la misura simultanea degli osservabili si/no $\theta_{\Delta_i}(A_i)$ ha dato, per esempio, tutte risposte positive, il sistema si trova subito dopo la misura nell'autospazio comune di tali operatori con autovalori 1 cioé sará rappresentato da una sovrapposizione *arbitraria* di autofunzionali relativi ad autovalori generalizzati a_i contenuti negli intervalli Δ_i e dunque a rigore non sara' univocamente determinato. Tuttavia se gli intervalli Δ_i sono sufficentemente piccoli lo stato potrá considerarsi determinato a tutti gli effetti pratici.

Un corollario di quanto detto finora é il seguente

Teorema 3

Siano $\vec{A}$ gli operatori a.a. rappresentativi di un insieme completo di osservabili compatibili $\vec{\mathcal{A}}$; allora l'osservabile $\mathcal{B}$, rappresentato dall'operatore a.a. B, é compatibile con $\vec{\mathcal{A}}$ se e solo se B é funzione di $\vec{A}$: $B=f(\vec{A})$

Dimostrazione: poiché per la (13)

$$\vec{A}|\vec{a}>=\vec{a}|\vec{a}>,$$

se B é funzione di $\vec{A}$, $B=f(\vec{A})$, allora $B|\vec{a}>=f(\vec{a})|\vec{a}>$ e quindi $|\vec{a}>$ sono autovettori anche di B cioé B ed $\vec{A}$ sono compatibili. Viceversa, se B ed $\vec{A}$ sono compatibili, allora

$$B|\vec{a}>=b|\vec{a}> \tag{14}$$

Ma la (14) definisce una mappa da $\vec{a}\in Sp(\vec{A})$ a $b\in Sp(B)$ ovvero definisce la funzione $b=f(\vec{a})$. Ma allora l'operatore a.a. $B=f(\vec{A})$ soddisfa la (14) e cioé B é funzione di $\vec{A}$.

Un'altra importante proprietá degli insiemi completi di osservabili compatibili, é che ogni insieme completo di osservabili compatibili definisce una *rappresentazione* concreta dello spazio di Hilbert astratto, $\mathcal{H}$, in cui vivono gli stati del sistema.

Sia $\vec{A}$ un insieme completo di osservabili con spettro continuo:

$$\vec{A}|\vec{a}>=\vec{a}|\vec{a}>$$

dove gli autokets $|\vec{a}>$ sono ortonormalizzati in senso generalizzato

$$<\vec{a}|\vec{a}'>=\delta(\vec{a}-\vec{a}')$$

e forniscono una base completa (generalizzata) di $\mathcal{H}$,

$$\int_{\vec{a}\in Sp(\vec{A})}|\vec{a}><\vec{a}|=1.$$

Allora, $\forall|\psi>\in\mathcal{H}$, si ha $|\psi>=\int_{\vec{a}\in Sp(\vec{A})}|\vec{a}><\vec{a}|\psi>$ e le funzioni modulo quadro integrabili

$$\psi(\vec{a})=<\vec{a}|\psi>\in L_2(Sp(\vec{A})$$

forniscono una *rappresentazione* di $\mathcal{H}$ in $L_2(Sp(\vec{A})$.

In tale rappresentazione gli operatori $\vec{A}$ sono descritti dagli operatori di moltiplicazione

$$A_i\psi(\vec{a})=a_i\psi(\vec{a})$$

Se $\vec{A}$ é un insieme completo di osservabili con spettro discreto, si ha

$$\vec{A}|\vec{a}>=\vec{a}|\vec{a}>$$

dove gli autokets $|\vec{a}>$ sono ortonormalizzati

$$<\vec{a}|\vec{a}'>=\delta_{\vec{a},\vec{a}'}$$

e forniscono una base completa di $\mathcal{H}$,

$$\sum_{\vec{a}\in Sp(\vec{A})}|\vec{a}><\vec{a}|=1.$$

In tal caso l'insieme numerabile e modulo quadro sommabile di numeri complessi

$$\psi_{\vec{a}}=<\vec{a}|\psi>\in l_2$$

fornisce una *rappresentazione* in l_2 dello spazio hilbertiano astratto $\mathcal{H}$.

Per esempio, per una particella priva di spin, le grandezze posizione $\vec{X}\equiv\{X,Y,Z\}$ o le grandezze impulso $\vec{P}\equiv\{P_x,P_y,P_z\}$ forniscono due insiemi completi di osservabili compatibili e definiscono rispettivamente le rappresentazioni $\mathcal{X}$ e $\mathcal{P}$ in $L_2(R^3)$:

Rappresentazione $\mathcal{X}$:

$$\vec{X}|\vec{x}>=\vec{x}|\vec{x}>$$

$$< \vec{x}|\vec{x}' >= \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$
$$1 = \int |\vec{x} >< \vec{x}|$$

e

$$\psi_{\mathcal{X}}(\vec{x}) =< \vec{x}|\psi >$$

rappresenta la funzione d'onda in rappresentazione $\mathcal{X}$ mentre le grandezze $\vec{X}$ e $\vec{P}$ sono rappresentate da

$$\vec{X}\psi_{\mathcal{X}}(\vec{x}) = \vec{x}\psi_{\mathcal{X}}(\vec{x})$$
$$\vec{P}\psi_{\mathcal{X}}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi_{\mathcal{X}}(\vec{x}).$$

In modo analogo

Rappresentazione $\mathcal{P}$:

$$\vec{P}|\vec{p} >= \vec{p}|\vec{p} >$$
$$< \vec{p}|\vec{p}' >= \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$
$$1 = \int |\vec{p} >< \vec{p}|$$

e

$$\psi_{\mathcal{P}}(\vec{p}) =< \vec{p}|\psi >$$

rappresenta la funzione d'onda in rappresentazione $\mathcal{P}$ mentre le grandezze $\vec{P}$ e $\vec{X}$ sono rappresentate da

$$\vec{P}\psi_{\mathcal{P}}(\vec{p}) = \vec{p}\psi_{\mathcal{P}}(\vec{p})$$
$$\vec{X}\psi_{\mathcal{P}}(\vec{p}) = -\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi_{\mathcal{P}}(\vec{p}).$$

Quantizzazione di un sistema con analogo classico

In generale dato un sistema classico, a n gradi di libertá, descritto dalle coordinate generalizzate q_i e dai momenti coniugati p_i, $i = 1, 2, ...n$, con le parentesi di Poisson

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}$$

il corrispondente sistema quantistico si ottiene sostituendo alle variabili classiche q_i e p_i gli operatori autoaggiunti Q_i e P_i e alle parentesi di Poisson i commutatori divisi per $i\hbar$, per cui

$$[Q_i, Q_j] = 0 = [P_i, P_j]$$

$$[Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{i,j}.$$

In genere le Q_i costituiscono un sistema completo di osservabili compatibili e cosí pure le P_i. In tal caso si dice che il sistema quantistico ha analogo classico. Come nel caso della particella priva di spin, le Q_i definiscono la rappresentazione $\{Q\}$ e le P_i la rappresentazione $\{P\}$.

Va tuttavia notato che non tutti i sistemi quantistici hanno analogo classico. Per esempio, come vedremo, per una particella con spin, le X_i da sole (o le P_i da sole) non forniscono un sistema completo di osservabili compatibili. Per ottenere un sistema completo di osservabili compatibili, alle $\vec{X}$ (o alle $\vec{P}$) dobbiamo aggiungere, come ulteriore osservabile compatibile, una componente dello spin (per esempio la componente dello spin lungo l'asse z).

Va anche notato che non sempre le $\vec{Q}$ e le $\vec{P}$ hanno lo stesso spettro delle corrispondenti grandezze classiche. Per esempio, un corpo rigido vincolato a ruotare intorno a un asse (diciamo l'asse z) é un sistema a un grado di libertá dove $q = \phi$ é l'angolo di rotazione e $p = l_z$ é la componente lungo z del momento angolare. Per il corrispondente sistema quantistico, in rappresentazione Φ, avremo

$$\Phi\psi(\phi) = \phi\psi(\phi) \tag{15a}$$

e

$$L_z\psi(\phi) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\phi}\psi(\phi) \tag{15b}$$

con

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Per ragioni fisiche le funzioni $\psi(\phi)$ devono essere periodiche nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e del resto sappiamo che l'operatore L_z in (15 b) é autoaggiunto solo in un dominio in cui al dominio naturale della derivata aggiungiamo la condizione che le funzioni su cui agisce siano periodiche: il suo spettro é discreto e formato dai punti $\hbar m$ con m intero !