Capitolo 5

Operatori lineari negli spazi a infinite dimensioni

5.1 I concetti di dominio, continuita' e limitatezza di un operatore.

Parecchi dei teoremi sugli operatori lineari negli spazi a dimensione finita possono essere estesi agli spazi di dimensione infinita; e' necessario usare pero' una certa cautela poiche', in generale, essi valgono solo se si pongono opportune restrizioni sulle classi di operatori che si considerano.

Una prima complicazione nasce dal fatto che negli spazi ad infinite dimensioni in generale **non** e' conveniente definire gli operatori lineari come omomorfismi fra due spazi E e K, associando ad **ogni** elemento di E un elemento di K.

Basti pensare allo spazio $L^{(2)}(a,b)$; l'operatore lineare **derivata,** $\frac{d}{dx}$, non si puo' applicare a tutte le funzioni che rappresentano vettori di $L^{(2)}(a,b)$, ma solo a quelle derivabili con derivata quadrato integrabile.

E' quindi utile adottare la seguente

Definizione 5.1.1. Dati due spazi vettoriali E e K si dice **operatore lineare** di E in K l'applicazione lineare $\mathcal{D}_A \to K$, dove $\mathcal{D}_A$ e' una varieta' lineare contenuta in E, detta **dominio** dell'operatore dell'operatore A.

E' importante osservare che $\mathcal{D}_A \subset E$ deve essere una varieta' lineare, e non un sottoinsieme qualsiasi di E, per garantire che $\forall x, y \in \mathcal{D}_A$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}$, abbia senso la proprieta'

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y, \tag{5.1}$$

che definisce la linearita' dell'applicazione.

Cio' mostra come il concetto di dominio sia superfluo negli spazi di dimensione finita; infatti se E ha dimensione finita N, la varieta' lineare $\mathcal{D}_A \subset E$ e' ancora uno spazio vettoriale E' di dimensione finita $M \leq N$; l'operatore A e' allora un omomorfismo fra lo spazio E' e lo spazio K.

Se invece E e' uno spazio vettoriale ad infinite dimensioni, la varieta' lineare $\mathcal{D}_A \subset E$ puo' essere uno spazio di natura diversa da E; abbastanza spesso succede, come nell'esempio $\frac{d}{dx}$, che $\mathcal{D}_A$ sia uno spazio normato non completo e che E sia il suo completamento, che valga cioe' $[\mathcal{D}_A] = E$.

Vedremo tuttavia che anche negli spazi ad infinite dimensioni esiste una sottoclasse di operatori per i quali e' superfluo introdurre il concetto di dominio.

Se E e K sono **spazi lineari topologici** (in particolare **spazi normati**) si puo' pensare al limite di una successione e chiedersi se si puo' scambiare l'operatore con il segno di limite; gli operatori per cui cio' e' lecito si chiamano operatori lineari continui.

Definizione 5.1.2. L'operatore lineare A e' **continuo** se per ogni successione convergente $\{x_n\}$, $x_n \in \mathcal{D}_A$, con $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathcal{D}_A$, vale

$$Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n \tag{5.2}$$

ovvero

$$A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n. \tag{5.3}$$

E' immediato verificare che ogni operatore lineare fra spazi a numero finito di dimensioni e' continuo; fissate infatti arbitrariamente una base in E ed una base in K, le componenti di $y = Ax$ ($x \in E$, $y \in K$) sono funzioni lineari, quindi continue, delle componenti di x.

La derivata fornisce esempio di **operatore non continuo** in $L^2(-\pi,\pi)$: la successione $\frac{1}{n}\sin nx$ converge a zero in norma quadratica, mentre la successione delle derivate $\cos nx$ non converge affatto[1] (le funzioni $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$ formano un sistema ortonormale).

Se E e K sono **spazi normati** e' utile introdurre anche la seguente

Definizione 5.1.3. L'operatore A e' **limitato** se esiste un $C > 0$ tale che per ogni $x \in \mathcal{D}_A$ vale

$$||Ax|| \leq C\,||x||\,,$$

ovvero se $\forall x \in D_A$, $||x|| = 1$, si ha

$$||Ax|| \leq C.$$

Si puo' definire **norma** di A:

$$||A|| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}_A \\ x \neq 0}} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}_A \\ ||x|| = 1}} ||Ax||\,, \tag{5.4}$$

che esiste certamente perche' $||Ax||$ e' limitato.

[1] La successione $\cos nx$ converge a zero solo **debolmente**, ovvero nel senso delle distribuzioni.

Per ogni $x \in \mathcal{D}_A$ si puo' quindi scrivere

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \,. \tag{5.5}$$

Mostriamo ora che se E e K sono spazi normati, le definizioni 5.1.2 e 5.1.3 sono equivalenti.

Teorema 5.1.1. Un operatore lineare e' continuo se e solo se e' limitato.
Dimostrazione:

- ($\Rightarrow$):

  $$A \text{ e' limitato} \Rightarrow A \text{ e' continuo.}$$

  Dalla 5.5 segue $||Ax - Ax_n|| \leq ||A|| \cdot ||x - x_n||$ e quindi:

  $$\lim_{n\to\infty} ||x - x_n|| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||Ax - Ax_n|| = 0,$$

  ovvero:

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax.$$

- ($\Leftarrow$):

  $$A \text{ e' continuo} \Rightarrow A \text{ e' limitato.}$$

  Procediamo per assurdo: se A non e' limitato $\exists\{x_n\}$, $||x_n|| = 1 \,/\, ||Ax_n|| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Cio' contraddice la continuita' di A poiche'

  $$||x_n|| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

  mentre

  $$\left\| \frac{Ax_n}{n} \right\| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A\frac{x_n}{n} \neq 0.$$

q.e.d.

Vale anche il seguente

Teorema 5.1.2. Un operatore lineare limitato A, che mandi lo spazio normato E nello spazio di Banach K, definito su un dominio $\mathcal{D}_A \subset E$ puo' essere esteso per continuita' in modo unico alla chiusura $[\mathcal{D}_A]$.
Dimostrazione:

$$\forall x \in [\mathcal{D}_A],\ \exists\{x_n\},\ x_n \in \mathcal{D}_A \quad / x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$\{Ax_n\}$ e' di Cauchy in K; infatti $||Ax_n - Ax_m|| \leq ||A|| \cdot ||x_n - x_m||$; quindi, per la completezza di K, $\exists y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \in K$.

Mostriamo che il limite y non dipende dalla successione scelta a rappresentare x; infatti se

$$x = \lim_{n\to\infty} x'_n, \quad x'_n \in \mathcal{D}_A,$$

la 5.5 implica

$$||Ax'_n - Ax_n|| \leq ||A|| \cdot ||x'_n - x_n|| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0;$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} (Ax'_n - Ax_n) = 0.$$

L'effetto di A su $x \in \mathcal{D}_A$ puo' quindi essere definito in modo univoco da: $Ax = y$. E' immediato verificare che questa estensione di A ne conserva la linearita' e la norma.

q.e.d.

Questo teorema mostra che, come per gli spazi a numero finito di dimensioni, anche nel caso degli spazi di Banach (ed in particolare di quelli di Hilbert) e' supefluo introdurre il concetto di dominio, qualora ci si limiti a **operatori lineari limitati**; infatti in tal caso il dominio e' (o puo' essere reso grazie al teorema 5.1.2) un sottospazio chiuso dello spazio di Banach E, quindi ancora uno spazio di Banach $E' \subset E$; quindi tanto vale limitarsi a studiare gli omomorfismi fra spazi di Banach $E' \to K$ e supporre che l'operatore sia definito su tutto E'.

Naturalmente lo stesso discorso non vale per gli **operatori non limitati** ed e' proprio in questo caso che e' essenziale introdurre il concetto di dominio.

Esercizio 1: Verificare che $\frac{d}{dx}$ non e' limitato in $L^2(-\pi, \pi)$, applicandolo alla successione $\cos nx$.

Esercizio 2: Verificare che l'operatore lineare **posizione** X, definito da $X : f \mapsto g$, dove $g(x) = xf(x)$, e' limitato in $L^2(a, b)$ con a, b finiti $[||x|| = \max(|a|, |b|)]$; se l'intervallo e' infinito, X non e' limitato e il suo dominio non puo' essere tutto $L^2(a, b)$.

5.2 Aggiunto di un operatore lineare non continuo, in spazio di Hilbert separabile $\mathcal{H}$

Supponiamo che il dominio $\mathcal{D}_A$ dell'operatore lineare $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}$ sia denso in $\mathcal{H}$ ($[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$),ma non coincida con $\mathcal{H}$; cio' succede se A non e' continuo. (vedi teorema 5.1.2). Per definire l'aggiunto di A si procede come in 4.5 ma ci vuole piu' cautela. Fissato un *generico* bra $\langle u| \in \mathcal{H}^\star$ **non** e' detto che l'applicazione $\mathcal{D}_A \to \mathbb{C}$:

$$|v\rangle \mapsto \langle u| (A |v\rangle) \tag{5.6}$$

che e' certo lineare e ben definita $\forall |v\rangle \in \mathcal{D}_A$, sia continua , come dovrebbe essere[2] per poter definire un bra (funzionale lineare continuo, vedi la definizione

[2]Ricordare la continuita' del prodotto scalare.

data nel capitolo 4) $\langle w|$ tale che valesse:

$$\langle w|\, v\rangle = \langle u|\,(A\,|v\rangle)\,, \quad \forall\,|v\rangle \in \mathcal{D}_A \tag{5.7}$$

Definizione 5.2.1. L'insieme $\mathcal{D}(A^\dagger)$ (che e' una varieta' lineare) dei ket $|u\rangle$ per cui l'applicazione 5.6 e' un funzionale lineare continuo (che chiamiamo $\langle w|$) si dice **dominio dell'operatore aggiunto** $A^\dagger$:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{|u\rangle \in \mathcal{H}/\exists\,\langle w| \in \mathcal{H}^\star/\,\langle w|\, v\rangle = \langle u|\,(A\,|v\rangle), \quad \forall\,|v\rangle \in \mathcal{D}_A\} \tag{5.8}$$

Per ogni $|u\rangle \in \mathcal{D}_{A^\dagger}$ si puo' allora scrivere

$$\langle u|\,A = \langle w|\,, \quad \text{ovvero}\, A^\dagger\,|u\rangle = |w\rangle \tag{5.9}$$

che definisce l'**aggiunto** $A^\dagger$ di A ; inoltre poiche' $\langle w|\, v\rangle$ si puo' scrivere sia come $\langle u|\,(A\,|v\rangle)$ che come $(\langle u|\,A)\,|v\rangle$ si possono lasciar cadere le parentesi e scrivere semplicemente $\langle u|\,A\,|v\rangle$; da $\langle w|\, v\rangle = \langle v|\, w\rangle^\star$ e dalla 5.9 segue infine

$$\langle u|\,A\,|v\rangle = \langle v|\,A^\dagger\,|u\rangle^\star\,, \quad \forall\,|v\rangle \in \mathcal{D}_A, \forall\,|u\rangle \in \mathcal{D}_{A^\dagger} \tag{5.10}$$

Definizione 5.2.2. L'operatore A si dice **autoaggiunto** se $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{D}_A$ e inoltre $A^\dagger = A$.

P 1 Proprieta': La 5.10 implica che $\forall \quad A$ autoaggiunto

$$\langle u|\,A\,|v\rangle^\star = \langle v|\,A\,|u\rangle\,, \quad \forall\,|u\rangle\,, |v\rangle \in \mathcal{D}_A \tag{5.11}$$

Notare che $\langle u|\,(A\,|v\rangle)^\star = \langle v|\,(A\,|u\rangle), \quad \forall\,|u\rangle\,, |v\rangle \in \mathcal{D}_A$, che e' la definizione di operatore **simmetrico** o **hermitiano**, non basta di per se' dire che A e' **autoaggiunto**; se A non e' continuo bisogna verificare esplicitamente che valga $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{D}_A$. Quando in fisica si dice hermitiano, si intende quasi sempre **autoaggiunto** ! Le proprieta' di ortogonalita' degli autovettori appartenenti ad autovalori diversi dipendono solo da 5.11, quindi valgono per gli operatori simmetrici; e' per avere la "completezza" (in senso generalizzato) dello spettro che ci vuole proprio la **autoaggiuntezza**, che e' qualcosa in piu' della semplice **hermiticita'**.[3]

Esempio 5.2.1. L'operatore posizione X in $L_2(\mathbb{R})$:

$$X : |f\rangle \mapsto |g\rangle = X\,|f\rangle\,, \quad \forall\,|f\rangle \in \mathcal{D}_X \tag{5.12}$$

dove $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$ (con tutta la classe delle funzioni ad essa quasi ovunque uguali) rappresenta il ket $|g\rangle$ ed e' data da

$$g(x) = xf(x)\ . \tag{5.13}$$

[3]Per Dirac, che sapeva il fatto suo, la definizione di **osservabile dinamica** contiene esplicitamente la richiesta di completezza dello spettro; usando terminologia matematicamente rigorosa, oggi diciamo che le osservabili fisiche sono gli operatori autoaggiunti, che sono quella sottoclasse (propria) degli operatori hermitiani che ha "spettro completo" (vedi paragrafo 5.5).

Affinche' $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$, non basta $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, ma deve andare a zero all'∞ abbastanza in fretta affinche' $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$; quindi

$$\mathcal{D}_X = \{f(x) \in L_2(\mathbb{R})/xf(x) \in L_2(\mathbb{R})\} \ . \tag{5.14}$$

Da

$$\langle u| X |f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx u^\star(x) x f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w^\star(x) f(x) dx$$

con $w(x) = xu(x)$ segue subito che, affinche' $w(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}_{X^\dagger} = \mathcal{D}_X$ e $X^\dagger = X$. Quindi X e' autoaggiunto.

Esempio 5.2.2. L'operatore derivata D in $L_2(\mathbb{R})$

$$D : |f\rangle \mapsto |g\rangle = D\,|f\rangle\,, \quad \forall\, |f\rangle \in \mathcal{D}_D \tag{5.15}$$

dove

$$g(x) = \frac{d}{dx} f(x) \tag{5.16}$$

Per definire il dominio $\mathcal{D}_D$ notiamo anzitutto che $f(x)$ deve essere derivabile (in senso ordinario) in tutto $\mathbb{R}$ e che $f'(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Da

$$\langle u| D |f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\star(x) f'(x) dx \tag{5.17}$$

segue che per poterlo scrivere come

$$\langle w|\, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w^\star(x) f(x) dx \tag{5.18}$$

bisogna effettuare un'integrazione per parti; ma per poterlo fare nell'ambito dell'integrazione alla Lebesgue ci vuole un po' di cautela. Infatti il teorema fondamentale del calcolo integrale vale anche per l'integrale di Lebesgue:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)dy =_{q.o.} f(x), \quad \forall f \in L(a,b), \quad \forall x \in [a,b] \tag{5.19}$$

ma non e' detto che la funzione sia uguale all'integrale della sua derivata.

Definizione 5.2.3. $f(x) \in L(a,b)$ si dice **assolutamente continua** se $f'(x)$ esiste quasi ovunque in (a,b) e vale

$$\int_a^x \frac{d}{dy} f(y) dy = f(x) - f(a), \quad \forall x \in [a,b] \tag{5.20}$$

La 5.19 implica che ogni primitiva di una funzione $\in L(a,b)$ e' assolutamente continua.

Un ovvio controesempio alla 5.20 e' una funzione con discontinuita' di prima specie in (a,b) (la derivata esiste q.o. ma non vale la 5.20); e' facile mostrare che $\forall f \in C_1$ vale la 5.20, ma $f(x)$ e' assolutamente continua anche se la sua derivata prima ha delle discontinuita' di prima specie in (a, b); quindi per la classe delle funzioni assolutamente continue (che indichiamo con $\widetilde{C}$, anche se non esiste una notazione standard) vale $C_0 \supset \widetilde{C} \supset C_1$. Si puo' dimostrare che somma e prodotto di f e $g \in \widetilde{C}$ appartengono ancora a $\widetilde{C}$. La 5.20 e' evidentemente l'ingrediente essenziale per l'integrazione per parti.

La prima sottigliezza nel definire il dominio di D e' allora che $f(x)$ deve essere *assolutamente continua*, quindi

$$\mathcal{D}_D = \Big\{ f(x) \in L_2(\mathbb{R}), f \in \widetilde{C}, f'(x) \in L_2(\mathbb{R}) \Big\} \tag{5.21}$$

A questo punto siamo a cavallo perche' se e solo se anche $u \in \mathcal{D}_D$ si puo' scrivere:

$$\langle u|\, D \,|f\rangle = u^\star(x) f(x) \mid_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^\star f(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)^\star f(x) dx = \langle w|\ f\rangle \tag{5.22}$$

dove il termine finito scompare perche' $u, v \in \mathcal{D}_D \Rightarrow u(x), f(x) \to 0, \quad per\, x \to \pm\infty$ e

$$w(x) = -\frac{du}{dx} \tag{5.23}$$

Quindi

$$\mathcal{D}_{D^\dagger} = \mathcal{D}_D, \quad D^\dagger = -D \tag{5.24}$$

da cui segue che

$$P = -iD = \begin{cases} -i\frac{d}{dx} \\ \mathcal{D}_P \equiv \mathcal{D}_D \end{cases}$$

e' *autoaggiunto.*

Esempio 5.2.3. L'operatore derivata D in $L^2(a, b)$. Dando per scontato che $\mathcal{D}_D \subset \widetilde{\mathcal{D}}_D = \Big\{ f \in L_2(a, b), f \in \widetilde{C}, f' \in L^2(a, b) \Big\}$ e lo stesso per $\mathcal{D}_{D^\dagger}$ e quindi che si possa effettuare l'integrazione per parti, le cose sono piu' complicate perche' in

$$\langle u|\, D \,|f\rangle = u^\star(x) f(x) \mid_a^b - \int_a^b u'(x)^\star f(x) dx \tag{5.25}$$

il termine finito non ha alcuna ragione di annullarsi; perche' cio' succeda dobbiamo *restringere* il dominio di D, usando per esempio **condizioni al contorno periodiche**:

$$D = \begin{cases} \frac{d}{dx} \\ \mathcal{D}_D = \Big\{ f \in \widetilde{\mathcal{D}}_D / f(b) = f(a) \Big\} \end{cases} \tag{5.26}$$

Allora 5.25 diventa

$$\langle u|\, D \,|f\rangle = (u^\star(b) - u^\star(a))\, f(a) - \int_a^b u(x)^\star f(x) dx$$

e il termine finito si annulla ($\forall f \in \mathcal{D}_D$) se e solo se anche $u \in \mathcal{D}_D$; quindi $\mathcal{D}_{D^\dagger} = \mathcal{D}_D, \quad D^\dagger = -D$ come nell'es.2.[4]

Se uno imponesse le c.c. (che devono sempre essere *omogenee*, affinche' $\mathcal{D}_D$ sia una varieta' lineare)

$$\mathcal{D}_D^{(0)} = \left\{ f \in \tilde{\mathcal{D}}_D / f(b) = f(a) = 0 \right\} \tag{5.27}$$

(buca di potenziale infinita in meccanica quantistica) allora il termine finito si annullerebbe comunque, $\forall u \in \tilde{\mathcal{D}}$; quindi

$$\mathcal{D}_{D^\dagger}^{(0)} = \tilde{\mathcal{D}} \neq \mathcal{D}_D^{(0)} \tag{5.28}$$

Quindi l'operatore

$$P^{(0)} = \begin{cases} -i\frac{d}{dx} \\ \mathcal{D}_D^{(0)} \end{cases}$$

, (che e' evidentemente simmetrico) *non* e' autoaggiunto; il suo *aggiunto* è

$$P^{(0)\dagger} = \begin{cases} -i\frac{d}{dx} \\ \tilde{\mathcal{D}} \end{cases}$$

che è $\neq P^{(0)}$, anche se ha la stessa espressione differenziale.

Se si restringe ulteriormente il dominio di $P^{(0)}$ a $f(x)$ con $f(x) \in \mathcal{D}_D^{(0)}$ ma tali che $f'(x) \in \tilde{\mathcal{D}}$, allora ha senso parlare di $P^{(0)\dagger}P^{(0)}$ e si può facilmente vedere che è *autoaggiunto*.[5]

Discorso analogo si puo' fare per $p_r = -i\frac{d}{dr}$ sulla semiretta $(0, \infty)$.

Altri esempi di operatori *autoaggiunti* sono già stati discussi nel paragrafo 6.4.1 di [1].

NOTA IMPORTANTE: In fisica, una volta verificato che un operatore A sia **hermitiano**, cioe' che soddisfi la 5.2.2 a pagina 9, si puo' quasi sempre supporre che sia anche **autoaggiunto**, cioe' che $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{D}_A$; bisogna controllarlo esplicitamente solo quando A sia un operatore differenziale su dominio dotato di bordo, con condizioni al contorno "strane", diverse dalle sicure condizioni al contorno periodiche.

[4]Nota per i raffinati: anche c.c. twistate $f(b) = e^{i\alpha} f(a), \quad \alpha \in [0, 2\pi)$ andrebbero bene lo stesso, ma darebbero *altri* operatori autoaggiunti:

$$P_{(\alpha)} = \begin{cases} -i\frac{d}{dx} \\ \mathcal{D}_{P_{(\alpha)}} = \left\{ f \in \tilde{\mathcal{D}} / f(b) = e^{i\alpha} f(a) \right\} \end{cases}$$

[5]Questo e' l'operatore che compare nell'hamiltoniana della buca di potenziale infinita in M.Q. .

5.3 Lo spettro degli operatori autoaggiunti nello spazio di Hilbert separabile.

Ulteriori approfondimenti a proposito si possono trovare nel paragrafo 4.5 di [2]; questi argomenti possono anche essere trovati nel capitolo 5 (ed in particolare nel §5.4) di [3], cui in buona parte ci ispiriamo, con qualche estensione.

Gli spazi di dimensione infinita si comportano molto diversamente da quelli a dimensione finita per quanto riguarda l'esistenza degli autovettori; infatti l'equazione secolare $det(A - \lambda\mathbf{1})$ perde di significato (e' possibile generalizzare il concetto di determinante anche alle matrici infinite, ma solo in casi molto particolari). In uno spazio a dimensione infinita, in particolare in uno spazio di Hilbert, un generico operatore, se vogliamo anche autoaggiunto, puo' anche essere del tutto privo di autovalori e autovettori.[6]

Esempio 5.3.1. Tipico e' l'operatore di posizione X che e' limitato, se (a, b) e' un intervallo finito, ed e' autoaggiunto. Ovviamente l'equazione

$$xf(x) = \lambda f(x), \quad f(x) \in L^2(a, b) \tag{5.29}$$

ha come unica soluzione $f(x) = 0$, $\forall x \neq \lambda$, quindi $f(x) \underset{q.o.}{=} 0$, cioe' il vettore nullo.

Negli spazi di dimensione infinita conviene quindi dare una definizione piu' ampia di autovalore, introducendo il concetto di autovalore generalizzato.

Definizione 5.3.1. Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore generalizzato** dell'operatore A, agente sullo spazio di Banach E (in particolare di Hilbert), se esiste una successione $\{v_n\}$ di vettori $v_n \in E$ tale che

$$\lim_{n\to\infty}(A - \lambda\mathbf{1})v_n = 0; \quad ||v_n|| \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.30}$$

Equivalentemente si puo' dire che $\lambda \in \mathbb{C}$ e' un autovalore generalizzato se

$$\forall\varepsilon > 0, \exists v \in E, \; ||v|| \geq 1/ \; ||(A - \lambda\mathbf{1})v|| < \varepsilon. \tag{5.31}$$

L'insieme degli autovalori generalizzati di A si dice **spettro** di A.

Ovviamente **ogni autovalore e' un autovalore generalizzato**, ma non e' detto il viceversa.

Prima di discutere alcuni esempi, introduciamo un modo equivalente di definire lo spettro di un **operatore autoaggiunto** A, con $[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$ (spazio di Hilbert separabile).

[6] Qui naturalmente parliamo di autovalori e autovettori in senso proprio, cioe' di soluzioni dell'equazione $Av = \lambda v$ con v appartenente allo spazio di Hilbert; e' possibile generalizzare il concetto di autovettore allargando lo spazio, e allora le cose cambiano, come vedremo fra un momento.

Definizione 5.3.2. $r \in \mathbb{C}$ è **punto regolare** di A se

$$\inf_{\substack{|\psi\rangle \in \mathcal{D}_A \\ |\psi\rangle \neq 0}} \frac{\|(A - r\mathbf{1})\,|\psi\rangle\|}{\||\psi\rangle\|} = c > 0 \tag{5.32}$$

Una definizione equivalente è

Definizione 5.3.3. r è **punto regolare** di A se esiste $(A - r\mathbf{1})^{-1}$ ed è **limitato**.

Infatti la 5.32 è equivalente a:

-
$$ker(A - r\mathbf{1}) = \{0\} \Rightarrow \exists (A - r\mathbf{1})^{-1}$$

-
$$\begin{aligned}
\left\|(A - r\mathbf{1})^{-1}\right\| &= \sup_{\substack{|\varphi\rangle \in Im(A - r\mathbf{1}) \\ |\varphi\rangle \neq 0}} \frac{\left\|(A - r\mathbf{1})^{-1}\,|\varphi\rangle\right\|}{\||\varphi\rangle\|} \\
&= \sup_{\substack{|\psi\rangle \in \mathcal{D}_A \\ |\psi\rangle \neq 0}} \frac{\||\psi\rangle\|}{\|(A - r\mathbf{1})\,|\psi\rangle\|} = \frac{1}{c}\ .
\end{aligned}$$

Definizione 5.3.4. Lo **spettro** di A e' l'insieme dei suoi punti <u>non</u> regolari; in altre parole $a \in \mathbb{C}$ appartiene allo **spettro** di A se

$$\inf_{\substack{|\psi\rangle \in \mathcal{D}_A \\ |\psi\rangle \neq 0}} \frac{\|(A - a\mathbf{1})\,|\psi\rangle\|}{\||\psi\rangle\|} = 0 \tag{5.33}$$

La 5.33 può realizzarsi in due modi alternativi:

Definizione 5.3.5. Se l'estremo inferiore nella 5.33 è un minimo, cioè esistono uno (o più, se c'è degenerazione) vettori $|a_i\rangle$ (linearmente indipendenti) per cui vale

$$(A - a_i\mathbf{1})\,|a_i\rangle = 0, \quad |a_i\rangle \neq 0 \tag{5.34}$$

allora a_i è un **autovalore** (in senso proprio).

Ciò è ovviamente equivalente a dire:

Definizione 5.3.6. a_i è autovalore se *non esiste* l'inverso di $(A - a_i\mathbf{1})$.

L'insieme degli *autovalori (propri)* di A si chiama **spettro discreto** ed è al più *numerabile.* Vale infatti il seguente

Teorema 5.3.1. L'insieme degli autovalori di un operatore normale (in particolare autoaggiunto) in uno spazio di Hilbert separabile e' al

piu' numerabile. Infatti autovettori appartenenti ad autovalori diversi di un operatore normale sono ortogonali[7] ed in uno spazio separabile un insieme di vettori ortogonali non puo' essere piu' che numerabile (vedi [2]).

Definizione 5.3.7. Se $a \in SpA$, cioè vale la 5.33, ma non è un autovalore (cioè l'estremo inferiore *non* è raggiunto) si dice che a fa parte dello **spettro continuo** ($SpcA$) o anche che è un **autovalore generalizzato non proprio**; infatti si può trovare una successione $|v_n\rangle$, $|||v_n\rangle|| \geq 1$ che soddisfa la definizione di autovalore generalizzato data precedentemente, cioè

$$\lim_{n\to\infty} (A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle = 0 \tag{5.35}$$

con $|||v_n\rangle|| \geq 1$, ma $\nexists\,|a\rangle$ che soddisfi la 5.34; viceversa lo stesso ragionamento mostra che se a e' autovalore generalizzato ma non proprio, allora $a \in SpcA$.

Equivalentemente si può dire:

Definizione 5.3.8. $a \in SpcA$ se $\exists (A - a\mathbf{1})^{-1}$ ma *non è limitato.*

NOTA: Poichè $A = A^\dagger$, dimostriamo che $a \in \mathbb{C}, \quad a \notin \mathbb{R}$ non può soddisfare la 5.35 (nè la 5.34, ma questo lo sappiamo già).

Infatti la 5.35 è equivalente a :

$$\lim_{n\to\infty} ||(A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle|| = 0$$

che, essendo $||(A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle|| = ||(A - a^\star\mathbf{1})\,|v_n\rangle||$ (da $A = A^\dagger$), implica

$$\lim_{n\to\infty} ||(A - a^\star\mathbf{1})\,|v_n\rangle|| = 0$$

e percio'

$$\lim_{n\to\infty} (A - a^\star\mathbf{1})\,|v_n\rangle = 0\ .$$

Sottraendo a quest'ultimo limite il 5.35, si ottiene $\lim_{n\to\infty}(a - a^\star)\,|v_n\rangle = 0$, che, essendo $|||v_n\rangle \geq 1||$ è possibile solo per $a = a^\star$.

Quindi, per A operatore autoaggiunto, $SpA \subset \mathbb{R}$.

Esempio 5.3.2. Lo spettro dell'operatore X dell'esempio 5.3.1, che e' certamente continuo poiche' non esistono autovalori, e' costituito da tutti i reali $\lambda \in [a, b]$. Infatti l'operatore $(X - \lambda\mathbf{1})^{-1}$, che manda la funzione $f(x) \in L^2(a, b)$ in

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - \lambda},$$

[7]Infatti se v_1 e' un autovettore dell'operatore normale A: $Av_1 = \lambda_1 v_1$, lo e' anche di $A^\dagger$: $A^\dagger v_1 = \lambda^\star v_1$. Se vale anche $Av_2 = \lambda_2 v_2$ si puo' scrivere $(v_2, A^\dagger v_1) = \lambda_1^\star (v_2, v_1)$ e $(v_1, Av_2) = \lambda_2 (v_1, v_2)$; confrontando l'ultima equazione con il complesso coniugato della penultima si ottiene l'asserto.

e' definito su tutto $L^2(a,b)$ ed e limitato per $\lambda \notin [a,b]$, come si vede ponendo $c = \min_{x \in [a,b]} |\lambda - x| \neq 0$ e calcolando

$$||g||^2 = \int_a^b \left| \frac{f(x)}{x-\lambda} \right| dx \leq \frac{1}{c^2} ||f||^2 .$$

Quindi ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin [a,b]$ e' punto regolare di X (vedi la definizione 5.3.2). Se invece $\lambda \in [a,b]$, il dominio di $(X - \lambda\mathbf{1})^{-1}$, pur essendo denso in $L^2(a,b)$, non contiene tutte le $f(x) \in L^2(a,b)$, ma solo quelle che rimangono quadrato integrabili una volta divise per $(x - \lambda)$, con λ sul cammino di integrazione; quindi $(X - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ esiste ma non e' limitato; pertanto $SpcX = [a,b]$.

Si puo' verificare direttamente che i punti dello spettro, $\lambda \in [a,b]$, sono autovalori generalizzati.

Infatti la eq. 5.30 e' soddisfatta dalla successione seguente

$$v_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right] \\ \frac{n}{2}, & x \in \left[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right] \end{cases} \tag{5.36}$$

(qui abbiamo scelto λ interno all'intervallo $[a,b]$; se λ e' un estremo la modifica e' ovvia).

Ovviamente vale

$$||v_n|| = \sqrt{\int_a^b |v_n(x)|^2 \, dx} = \sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1, \quad n = 2, 3, \ldots$$

inoltre

$$\begin{aligned} ||(X - \lambda\mathbf{1})v_n||^2 &= \int_a^b (x-\lambda)^2 \, v_n^2(x) dx \\ &= \int_{\lambda - \frac{1}{n}}^{\lambda + \frac{1}{n}} \frac{n^2}{4} (x - \lambda)^2 dx \\ &\leq \frac{n^2}{4} \frac{1}{n^2} \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0; \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{n \to \infty} (X - \lambda\mathbf{1}) v_n = 0,$$

come volevamo mostrare.

Il lettore smaliziato intuisce che tutto sarebbe piu' semplice se potessimo dire che l'autovettore di X e' $\lim_{n\to\infty} v_n$; questo non esiste in $L^2(a,b)$ (la successione $\{v_n\}$ non e' Cauchy); per arrivarci bisogna allargare lo spazio ed immergere

$L^2(a,b)$ nello spazio delle distribuzioni ed introdurre la sospirata δ di Dirac, ma lo faremo piu' avanti.

Esempio 5.3.3. $P = -i\frac{d}{dx}$, con dominio nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ e condizioni al contorno periodiche, non ha spettro continuo; infatti se riscrivo $(P - r\mathbf{1})u = f, \quad \forall f \in L^2(-\pi,\pi)$, usando lo sviluppo trigonometrico di Fourier,

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty} f_n \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

ottengo

$$(n-r)u_n = f_n$$

che posso risolvere $\forall r \neq n \in \mathbb{Z}$ (escludendo cioè gli autovalori di P), trovando:

$$u_n = \frac{f_n}{n-r}$$

quindi,

$$||u||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|f_n|^2}{|n-r|^2} \ .$$

Ponendo $\Lambda = \min |n-r| > 0, \quad \forall r \notin \mathbb{Z}$ si ha

$$||u||^2 \le \frac{1}{\Lambda^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 = \frac{||f||^2}{\Lambda^2}$$

Poichè $u = (P - r\mathbf{1})^{-1} f$, $(P - r\mathbf{1})^{-1}$ è limitato; quindi ogni $r \in \mathbb{C}$, $r \notin \mathbb{Z}$ (cioè non autovalore proprio) è *regolare.*

Riassumendo:

$$SpdP = \mathbb{Z}, \quad SpcP = \emptyset \ .$$

Esempio 5.3.4.

$$P = \begin{cases} -i\frac{d}{dx} \\ \tilde{\mathcal{D}}_P = L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{R}$ appartiene allo spettro continuo.

Infatti $Pu = ku \quad \Rightarrow \quad u = Ce^{ikx} \notin L^2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow SpdP = \emptyset$ (cioè lo spettro discreto di P è vuoto).

Ponendo $u_n = e^{ikx}e^{-\frac{x^2}{n^2}} \in L^2(\mathbb{R})$ si ottiene $\lim_{n\to\infty}(P - k\mathbf{1})u_n = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$, come da verifica diretta .

(per fare questa verifica diretta si consiglia di studiare $\lim_{\varepsilon\to 0}||(P - k\mathbf{1})u_\varepsilon||^2$ con $u_\varepsilon = e^{ikx}e^{-\varepsilon^2x^2}$ mediante un ragionamento dimensionale) .

Si può inoltre verificare che se $Imk \neq 0$ allora $\lim_{\varepsilon\to 0} ||(P - k\mathbf{1})u_\varepsilon||^2 \to \infty$.

Quindi

$$SpcP = \mathbb{R} \quad SpdP = \emptyset \ .$$

Abbiamo esempi di operatori autoaggiunti (limitati o no, non importa) con spettro solo discreto (completo in $\mathcal{H}$) (se ne possono vedere nel §6.4 di [1]) , o con spettro solo continuo (X sia su $L^2(a,b)$ che su $L^2(\mathbb{R})$, $-i\frac{d}{dx}$ su $L^2(\mathbb{R})$); ce ne sono altri con spettro misto (per esempio quelli che si vedono nel corso di Meccanica Quantistica nella trattazione di buche di potenziale con $V(\overrightarrow{x}) \to 0$ per $\overrightarrow{x} \to \infty$ e per l'atomo d' idrogeno) .

E' possibile classificare ulteriormente gli operatori autoaggiunti per trovare una sottoclasse che abbia solo spettro discreto (in cui gli autovettori formano un sistema ONC, ortonormale discreto, in $\mathcal{H}$), ma è più interessante cercare di estendere il concetto di completezza dello spettro anche al caso dello spettro continuo (o misto).

Per questo dobbiamo arricchire lo spazio di Hilbert separabile, introducendo il concetto di **spazio di Hilbert equipaggiato** (o **rigged**), in modo da fare rientrare, per esempio, la δ di Dirac (esempio 5.3.2) o l'onda piana (esempio 5.3.4) fra le autofunzioni (generalizzate) ammissibili.

5.4 Teoria delle distribuzioni e spazio di Hilbert equipaggiato (Rigged Hilbert Space).

Richiamiamo qui, approfondendolo, il concetto di **distribuzione temperata**, gia' introdotto in [1]. Il punto di partenza e' lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni di prova.

Definizione 5.4.1. Indichiamo con $\mathcal{S}$ (detto "spazio delle funzioni di prova" in relazione alla teoria delle distribuzioni temperate) l'insieme delle funzioni complesse di variabile reale, **indefinitamente derivabili** su tutto l'asse reale e decrescenti con tutte le loro derivate piu' rapidamente di ogni potenza, per $x \to \infty$ (in breve: **rapidamente decrescenti**).
In linguaggio formale

$$\mathcal{S} = \left\{ f(x) \;/\; f \in C_\infty ;\; \lim_{x\to\infty} x^n \frac{d^m f}{dx^m} = 0, \quad \forall m,n = 0,1,2,\ldots \right\}. \qquad (5.37)$$

Osserviamo subito che la condizione di decrescenza rapida di $f(x)$ e delle sue derivate puo' anche essere espressa in modo del tutto equivalente[8] richiedendo che per ogni coppia di interi non negativi p e q esista una costante $C_{pq} > 0$ tale che

$$\left| x^p \frac{d^q f}{dx^q} \right| \le C_{pq}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \;. \qquad (5.38)$$

Puo' essere utile anche definire uno spazio di funzioni di prova $\mathcal{S}(a,b)$, o $\mathcal{S}(S_1)$, contenuto in $L^2(a,b)$ o, il che e' lo stesso, in $L^2(S_1)$; esso e' formato da tutte le funzioni C_∞ periodiche su (a,b), o definite su S_1. La generalizzazione a funzioni

[8] Per convincersi che la 5.38 implica la rapida decrescenza basta porre $p = n+1$, $q = m$ e confrontare 5.38 e 5.37.

di piu' variabili non presenta difficolta' e viene data per scontata; discutiamo il caso di una sola variabile solo per semplicita' di notazioni.

Abbiamo gia' visto in [1] che lo spazio $\mathcal{S}$ gode della proprieta' di essere mandato in se stesso dalla Trasformata di Fourier e che e' utile per estendere la T.F. all'intero spazio $L^2(-\infty, +\infty)$.

Per ottenere questo scopo, si considera $\mathcal{S}$ come sottospazio (non chiuso) di qualche altro spazio normato (in particolare L^2); adesso invece stabiliremo su di esso una sua propria peculiare topologia, che ci permettera' di introdurre in modo rigoroso uno dei concetti piu' importanti (e di maggiore versatilita' nelle applicazioni) dell'Analisi Matematica degli ultimi decenni.

A differenza di tutti i casi incontrati finora, la topologia sullo spazio vettoriale $\mathcal{S}$ non sara' assegnata stabilendo su di esso una norma (e quindi rendendolo spazio normato), ma usando invece una prescrizione piu' generale (e un po' piu' complicata); per informazione dei lettori diciamo che lo spazio $\mathcal{S}$ viene considerato come "spazio numerabilmente normato" (stabilendo su di esso una infinita' numerabile di norme), che tale spazio e' uno "spazio topologico lineare" e che puo' essere reso metrico; tuttavia per la definizione dei termini fra virgolette rimandiamo il lettore interessato alla letteratura (per esempio Kolmogorov-Fomin[4]).

Noi ci limitiamo invece a definire quanto ci e' direttamente utile, cioe' il concetto di convergenza implicato da tale topologia.

Definizione 5.4.2. Una successione di funzioni $f_n(x) \in \mathcal{S}$ si dice **convergente in** $\mathcal{S}$ alla funzione $f(x) \in C_\infty$ e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{in}\, \mathcal{S} \tag{5.39}$$

se $\forall m = 0, 1, 2, \ldots$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^m f_n}{dx^m} = \frac{d^m f}{dx^m} \tag{5.40}$$

uniformemente rispetto ad x in ogni intervallo finito ed inoltre le costanti C_{pq} della maggiorazione possono essere scelte indipendentemente da n, cioe' se vale

$$\left| x^p \frac{d^q f_n}{dx^q} \right| \leq C_{pq} \tag{5.41}$$

qualunque sia n.

E' facile mostrare che le eq. 5.40 e 5.41 sono equivalenti a

$$\lim_{n\to\infty} x^l \frac{d^m f_n}{dx^m} = x^l \frac{d^m f}{dx^m} \tag{5.42}$$

uniformemente su tutto l'asse reale.

Enunciando la definizione 5.4.2 abbiamo appositamente tralasciato di richiedere che la funzione limite $f(x)$ appartenga ad $\mathcal{S}$; si puo' infatti mostrare che cio' e' sempre vero se le condizioni 5.40 e 5.41 sono soddisfatte; cio' e' un riflesso del fatto che lo spazio $\mathcal{S}$ inteso come spazio metrico (con un'opportuna definizione di distanza che non e' il caso qui di riportare), e' **completo**, come si puo' dimostrare (si veda per esempio [5]).

Intuitivamente, queste osservazioni possono sintetizzarsi nel notare che la definizione 5.4.2 di convergenza e' molto piu' stringente della convergenza in L^2, L^1 o anche uniforme, e questo ci permette, calcolando il limite, di non uscire da $\mathcal{S}$. Un primo vantaggio della definizione 5.4.2 di convergenza, che avra' importantissime conseguenze, e' che **l'operatore derivata e' continuo**[9] **in** $\mathcal{S}$; infatti basta mandare m in $m+1$ e q in $q+1$ nelle 5.40, 5.41 per vedere come la 5.39 implichi

$$\frac{df}{dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx} \quad \text{in } \mathcal{S} \tag{5.43}$$

ovvero

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx} \quad \text{in } \mathcal{S}\ . \tag{5.44}$$

Allo stesso modo si verifica che **l'operatore** X **e' continuo in** $\mathcal{S}$, anche se definito su tutto $\mathbb{R}$. Quindi, diversamente che in L^2, in $\mathcal{S}$ tutti gli operatori di interesse fisico sono continui.[10] Questa e' forse la ragione principale per introdurre $\mathcal{S}$ con la sua peculiare topologia.

Abbiamo ora gli elementi per introdurre la

Definizione 5.4.3. Si dice **distribuzione temperata** ogni **funzionale lineare continuo** su $\mathcal{S}$; esplicitamente diremo che l'applicazione $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ e' una distribuzione (e useremo la notazione $\langle T, g\rangle$ per indicare il numero complesso in cui T manda la funzione $g \in \mathcal{S}$) se essa e' **lineare**:

$$\langle T, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\rangle = \alpha_1 \langle T, g_1\rangle + \alpha_2 \langle T, g_2\rangle \tag{5.45}$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}; \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{S},$$

e **continua**:

$$\left\langle T, \lim_{n\to\infty} g_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T, g_n\rangle \tag{5.46}$$

naturalmente nella 5.47 le funzioni g_n appartengono a $\mathcal{S}$ e il limite nel primo membro della 5.47 va inteso nel senso della definizione 5.4.2 (il limite a secondo membro e' ovviamente il solito limite di una successione di numeri complessi).

All'insieme dei funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$ si puo' dare la struttura di spazio lineare con la seguente definizione:

$$\langle \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, g\rangle = \alpha_1^\star \langle T_1, g\rangle + \alpha_2^\star \langle T_2, g\rangle\,, \quad \forall g \in \mathcal{S}, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

tale spazio si indica con $\mathcal{S}'$ e si chiama **spazio delle distribuzioni temperate** (**spazio duale** dello spazio delle funzioni di prova $\mathcal{S}$).

L'insieme delle funzioni complesse di variabile reale $f(x)$ definite q.o. su tutto l'asse reale, **localmente sommabili** (cioe' sommabili su ogni intervallo

[9] Diversamente che in L^2.

[10] **Purche' si usi per il limite la definizione 5.4.2.**

finito) e a **crescenza algebrica finita** (tali cioe' che esistono un $x_0 > 0$, una costante $C > 0$ e un $m \in \mathbb{N}$ per cui

$$|f(x)| \leq C\,|x|^m\,, \quad \forall\,|x| > x_0 \tag{5.47}$$

forma uno spazio vettoriale che indicheremo con G (questa notazione non e' standard).

Fissata una $f(x) \in G$ si puo' definire in modo unico un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$, quindi una distribuzione temperata che indicheremo con lo stesso simbolo f, nel modo seguente:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\star(x) g(x) dx, \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{5.48}$$

L'integrale a secondo membro **esiste** certamente poiche' l'integrando e' una funzione localmente sommabile e decrescente all'infinito piu' rapidamente di qualsiasi potenza; esso e' effettivamente un **funzionale**, poiche' associa un numero complesso ad ogni $g \in \mathcal{S}$, **lineare**, per la linearita' dell'integrale, e **continuo**, per il teorema di Lebesgue e la definizione 5.4.2 di limite in $\mathcal{S}$.

L'integrale 5.48 assomiglia molto alla definizione del prodotto scalare in L^2(non a caso si usa la notazione $\langle f, g\rangle$ che e' una specie di compromesso fra la notazione usuale per il prodotto scalare (f, g) e quella di Dirac $\langle f, g\rangle$) salvo un'importante differenza: nella 5.48 i due fattori f e g appartengono a spazi diversi ($g \in \mathcal{S} \subset L^2$ e $f \in G \supset L^2$); il secondo fattore e' costretto nello spazio $\mathcal{S}$, molto piu' piccolo di L^2, proprio affinche' il primo possa appartenere ad uno spazio piu' ampio.

La 5.48 definisce un'applicazione lineare dello spazio G delle funzioni localmente sommabili a crescenza algebrica finita nello spazio $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate; infatti

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))^\star\, g(x) dx \\ &= \alpha_1^\star \langle f_1, g\rangle + \alpha_2^\star \langle f_2, g\rangle \\ \forall g \in \mathcal{S} \quad \forall f_1, f_2 \in G \quad &\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

E' facile dimostrare che tale applicazione e' **iniettiva** (vedi [2]), cioe'

$$\langle f_1, g\rangle = \langle f_2, g\rangle\,, \quad \forall g \in \mathcal{S} \Rightarrow f_1(x) \underset{q.o.}{=} f_2(x) \tag{5.50}$$

per funzioni $f_1(x), f_2(x) \in G$.

La 5.48 realizza quindi un'immersione dello spazio G in $\mathcal{S}'$; percio' possiamo, senza rischi di equivoco, identificare G con la sua immagine in $\mathcal{S}'$ e quindi **identificare ogni funzione localmente sommabile a crescenza algebrica finita con la distribuzione temperata da essa individuata mediante la 5.48.**

Gia' a questo punto e' utile osservare la radicale differenza rispetto alla situazione descritta dal teorema di Riesz : lo spazio $\mathcal{S}'$ duale di $\mathcal{S}$, e' molto piu' ampio di $\mathcal{S}$ poiche' contiene al suo interno lo spazio G che e' gia' di per se' piu' ampio di L^2 e L^1.

Anzi si puo' dire di piu': l'applicazione di G in $\mathcal{S}'$ descritta dalla 5.48 **non e' suriettiva**; esistono cioe' delle distribuzioni temperate che non possono essere rappresentate mediante funzioni (appartenenti a G, ma questo bisogna richiederlo per forza se vogliamo che l'integrale 5.48 abbia senso). Proviamolo su un esempio illustre, la **delta di Dirac**.

Definizione 5.4.4. Si dice **delta di Dirac**, e si indica con il simbolo δ la distribuzione temperata cosi' definita:

$$\langle \delta, g \rangle = g(0), \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{5.51}$$

Simbolicamente si scrive anche, come gia' visto in [1],

$$\langle \delta, g \rangle = \int dx \delta(x) g(x) \ . \tag{5.52}$$

Ammettiamo per assurdo che esista una funzione $h(x) \in G$ che riproduca la δ tramite la 5.48, tale cioe' che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h^\star(x) g(x) dx = g(0), \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{5.53}$$

In particolare la 5.53 dovrebbe valere per le funzioni $g_\epsilon \in \mathcal{S}$ cosi' definite ($\epsilon > 0$)

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2 - x^2}\right), & |x| < \epsilon \\ 0, & |x| \geq \epsilon; \end{cases} \tag{5.54}$$

poiche' $g_\epsilon(0) = 1$ la 5.53 implica

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} h^\star(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) dx = 1. \tag{5.55}$$

Ma si ha anche

$$\left| \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} h^\star(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) dx \right| \leq \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} |h(x)| \, dx$$

che tende a zero[11] per $\epsilon \to 0$; ma cio' e' in contrasto con la 5.55 e quindi l'ipotesi 5.53 e' assurda.

Abbiamo quindi la seguente catena di inclusioni **proprie**

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subset G \subset \mathcal{S}'. \tag{5.56}$$

Le distribuzioni vengono spesso chiamate **funzioni generalizzate** poiche' esse generalizzano, uscendo fuori dalla classe delle funzioni propriamente dette, il concetto di funzione localmente sommabile (e a crescenza algebrica finita). Le

[11] L'integrale di Lebesgue e' una funzione continua dei suoi estremi.

distribuzioni che possono essere rappresentate da funzioni ordinarie mediante la 5.48 si dicono **distribuzioni regolari**, le altre (come per esempio la delta di Dirac) **distribuzioni singolari**. Per analogia al caso delle distribuzioni regolari, per ogni distribuzione T si scrive spesso $\langle T, g\rangle = \int T^{\star}(x)g(x)dx$; non bisogna pero' dimenticare che $T(x)$ e' una notazione simbolica e che $T(x)$ **non** rappresenta il valore di T nel punto x[12]; per ulteriori commenti sulla notazione $T(x)$ vedi il paragrafo 8.2 di [2].

Per rendersi ragione dell'aggettivo temperata si veda [2]. Il sostantivo nasce dall'analogia con una semplice situazione fisica: per esempio una distribuzione continua di carica su una retta e' rappresentata dalla funzione ordinaria densita': $\rho(x)$; una carica q puntiforme situata nel punto $x = 0$ dalla distribuzione singolare $q\delta(x)$.

Nello spazio lineare $\mathcal{S}'$ delle distribuzioni temperate e' naturale introdurre il seguente concetto di **limite debole**

Definizione 5.4.5. Sia $\{T_n\}$ una succesione di distribuzioni $T_n \in \mathcal{S}'$; si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{S}'$ ne e' il **limite debole** (o **nel senso delle distribuzioni**) e si scrive

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \text{ debole} \tag{5.57}$$

se $\forall g \in \mathcal{S}$ esiste il limite della successione di numeri complessi $\langle T_n, g\rangle$ e vale [13]

$$\langle T, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, g\rangle, \qquad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{5.59}$$

Nel linguaggio formale la 5.59 diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T^*(x)g(x)dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_n^*(x)g(x)dx. \tag{5.60}$$

Nel caso molto frequente in cui le $T_n(x)$ siano distribuzioni regolari e la $T(x)$ sia singolare, gli integrali al secondo membro hanno senso proprio, mentre cio' non succede per quello al primo membro. Quindi in questo caso la definizione 5.4.5 puo' essere letta in un modo molto pratico: il limite 5.57 acquista senso (ordinario) qualora si moltiplichi la 5.57 per una funzione di prova $g(x)$ e si integri su x, con l'avvertenza che al secondo membro **bisogna** scambiare d'ordine limite con integrale, cioe' effettuare prima l'integrazione poi il limite, in accordo con la 5.60.

[12] Cio' non e' una novita': se f e' un vettore $\in L^2$ esso e' rappresentato da una classe di funzioni q.o. uguali e quindi $f(x)$ **non** e' il valore di f in x (a meno che non si impongano ulteriori richieste, quali la continuita').

[13] La nostra definizione e' in realtà rindondante: basta richiedere che esista

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, g\rangle, \quad \forall g \in \mathcal{S}. \tag{5.58}$$

Infatti l'esistenza di tale limite numerico permette di definire, con la 5.57, il funzionale lineare T, che si puo' dimostrare (ma non e' banale, si veda per esempio Vladimirov[5] pag.25) essere continuo e percio' rappresentare effettivamente una distribuzione.

Se invece si cerca di effettuare il $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ nel senso della convergenza puntuale, in generale si ottiene o qualcosa che non ha senso o qualcosa che non ha nulla a che fare con la distribuzione $T(x)$.
Esistono pero' casi in cui il limite al secondo membro della 5.60 puo' essere fatto filtrare dentro l'integrale anche in senso ordinario. Infatti dal teorema di Lebesgue applicato all'integrale 5.60 segue immediatamente il

Teorema 5.4.1. Se la successione delle funzioni $f_n(x)$ localmente sommabili[14] converge puntualmente quasi ovunque alla funzione localmente sommabile e inoltre esiste una $F(x)$ indipendente da n localmente sommabile tale che

$$|f_n(x)| \overset{\text{q.o.}}{\leq} F(x) \ , \qquad \forall n \in \mathbb{R}, \tag{5.61}$$

allora vale anche

$$f(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{debole.} \tag{5.62}$$

La definizione 5.4.5 permette di dare utilissime rappresentazioni della $\delta(x)$ come limite debole di successioni di funzioni ordinarie quali quelle discusse in [1].

5.5 Completezza dello spettro degli operatori autoaggiunti negli spazi di Hilbert equipaggiati.

Un esempio di *spazio di Hilbert equipaggiato* è la terna

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{S}' \tag{5.63}$$

dove

- L^2 può significare $L^2(\mathbb{R})$ o, con ovvie modificazioni, $L^2(\mathbb{R}_n)$, o anche $L^2(a,b)$; per comodità ci fissiamo su $L^2(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}$ è lo spazio delle funzioni di prova con la sua propria definizione di limite.
- $\mathcal{S}'$ è lo spazio delle *distribuzioni temperate* su $\mathcal{S}$ (funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$).
- Nella topologia di L^2 , $\mathcal{S}$ non è completo, ma è denso in L^2 , $[\mathcal{S}] = L^2$.
- La topologia di $\mathcal{S}$ è più forte di quella di L^2 , ovvero

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{in}\, \mathcal{S} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{in}\, L^2$$

Spesso in Meccanica Quantistica lo spazio di Hilbert non è L^2 ma $L^2 \otimes \mathbb{C}_{2s+1}$ (particella di spin s), ma basta moltiplicare anche $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ per $\mathbb{C}_{2s+1}$ e non cambia nulla.

[14] e a crescenza algebrica finita se lavoriamo con distribuzioni temperate.

Tutto funziona tale e quale anche per lo spazio di Hilbert astratto $\mathcal{H}$, non realizzato da L^2, purchè $\mathcal{S}$ significhi *spazio nucleare perfetto*, che è la generalizzazzione astratta dello spazio delle funzioni di prova, e $\mathcal{S}'$ lo spazio dei funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$. Quanto diremo varra' in generale per la terna $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{S}'$, con $\mathcal{S}$ denso in $\mathcal{H}$ (secondo la topologia di $\mathcal{H}$), ma e' bene pensare come esempio alla terna $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$.

P1 Proprieta': Un operatore autoaggiunto A in $\mathcal{H}$ (secondo la definizione data nel §5.2) tale che $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_A$ e che sia *continuo* in $\mathcal{S}$[15] può essere esteso ad $\mathcal{S}'$ ed è ivi **continuo**, con la **definizione** seguente:

$$\begin{aligned} A: &\quad \mathcal{S}' \to \mathcal{S}' \\ A: &\quad \langle T| \mapsto \langle T|\, A, \text{ dove} \\ \langle T|\, A: &\quad \mathcal{S} \to \mathcal{S} \\ \langle T|\, A: &\quad |g\rangle \mapsto \langle T|\, (A\, |g\rangle) \ . \end{aligned} \tag{5.64}$$

$\langle T|\, A$ è un funzionale lineare *continuo* , per la linearita' e la continuità di A (in $\mathcal{S}$!) e di $\langle T|$ (per definizione !).

Quindi si può scrivere $\langle T|\, (A\,|g\rangle) = \langle T|\, A\,|g\rangle$ come nello spazio di Hilbert separabile, ma qui $|g\rangle \in \mathcal{S}$, $\quad \langle T| \in \mathcal{S}'$ ed A è continuo in $\mathcal{S}$, nonostante non lo fosse in $\mathcal{H}$. (Notare che nel linguaggio del §5.2 avrei $\mathcal{D}_{A^\dagger} = \mathcal{S}'$!).

Da fisici, definiamo in modo puramente formale

$$\langle g|\, T\rangle = \langle T|\, g\rangle^\star \,, \quad \forall\, |g\rangle \in \mathcal{S}, \forall\, \langle T| \in \mathcal{S}' \tag{5.65}$$

e continuiamo a chiamare $\mathcal{S}$ l'insieme delle $\langle g|$ ed $\mathcal{S}'$ quello delle $|T\rangle$; con questa notazione posso anche scrivere

$$\langle g|\, A\,|T\rangle = \langle T|\, A\,|g\rangle^\star \tag{5.66}$$

e quindi implicitamente definisco

$$A : |T\rangle \mapsto A\,|T\rangle\,, \quad \forall\, |T\rangle \in \mathcal{S}'.$$

La proprieta' appena enunciata e' di estrema importanza ed e' il cuore della teoria delle distribuzioni (o piu' propriamente degli spazi di Hilbert equipaggiati): si parte da un operatore A autoaggiunto in $\mathcal{H}$, ma, nel caso piu' interessante, non continuo in $\mathcal{H}$ e con dominio un sottospazio **proprio** di $\mathcal{H}$ (quindi nemmeno definito in tutto $\mathcal{H}$); si fa un passo indietro in $\mathcal{S}$ per prendere la rincorsa e si salta in $\mathcal{S}'$ ottenendo un operatore definito in tutto $\mathcal{S}'$ (e quindi in tutto $\mathcal{H}$) e per di piu' continuo! Come si e' visto il miracolo e' dovuto ad un sapiente uso delle varie topologie.

Esempio 5.5.1. X in $L^2(\mathbb{R})$ non è continuo, $\mathcal{D}_X = \{f/xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$ e' sottospazio proprio di $\mathcal{H}$, ma $\forall f \in \mathcal{S}'$ (in particolare $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$) $xf(x) \in \mathcal{S}'$ (vedi anche la proprietà D4 del §8.2 di [2]) anche se non è detto che $xf(x) \in L^2$.

[15] Naturalmente secondo la topologia propria di $\mathcal{S}$ (vedi def. 5.4.2).

Esempio 5.5.2. La stessa cosa vale per $P = -i\frac{d}{dx}$; una $f \in L^2$ ma non derivabile non appartiene a $\mathcal{D}_P \subset L^2$ ma può essere derivata nel senso delle distribuzioni e $\frac{d}{dx}f \in \mathcal{S}'$.

Inoltre sia X che P sono **continui** in $\mathcal{S}'$, e cosi' ogni operatore differenziale ottenuto dalla loro ripetuta composizione.

5.6 Equazione agli autovalori generalizzata e teorema spettrale.

Ha quindi senso considerare *l'equazione agli autovalori generalizzata* per l'operatore autoaggiunto A ($A = A^\dagger$, $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{S}$, $[\mathcal{D}_A] = \mathcal{H}$)

$$A\,|a\rangle = a\,|a\rangle\,, \quad |a\rangle \in \mathcal{S}', \quad |a\rangle \neq 0 \tag{5.67}$$

Si può dimostrare che gli $a \in \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione 5.67 sono tutti e solo i punti dello spettro di A; se $|a\rangle \in \mathcal{H}$ sono autovalori propri, altrimenti sono autovalori generalizzati. Quindi tale equazione equivale alla 5.30 che definisce gli autovalori generalizzati rimanendo all'interno dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Nel caso particolare della 5.67 in cui $|a\rangle \in \mathcal{H} \subset \mathcal{S}'$ allora a e' un autovalore proprio, ovvero $a \in SpdA$; se invece vale la 5.67 con $|a\rangle \notin \mathcal{H}$, allora si potra' trovare una successione di $|v_n\rangle \in \mathcal{H}$, $\||v_n\rangle\| \geq 1 \quad / \lim_{n\to\infty}(A - a\mathbf{1})\,|v_n\rangle = 0$ in $\mathcal{H}$ con $\lim_{n\to\infty}|v_n\rangle = |a\rangle$ in $\mathcal{S}'$ (ma non in $\mathcal{H}$) ed allora $a \in SpcA$.

Esempio 5.6.1. Riprendendo la u_n definita nell'esempio 2 della precedente sezione:

$u_n = e^{ikx}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$consideriamo il $\lim_{n\to\infty}(P - k\mathbf{1})u_n = 0$ e vediamo anche che si può allora scrivere

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = e^{ikx}$$

dove il limite va inteso nel senso debole, cioe' nel senso delle distribuzioni, ed $e^{ikx} \in \mathcal{S}'$, $e^{ikx} \notin \mathcal{H}$.

Analogamente nell'esempio 5.3.2 $\lim_{n\to\infty} v_n = \delta(x - \lambda)$ in $\mathcal{S}'$.

Enunciamo, senza dimostrazione, il cruciale teorema sulla **completezza dello spettro degli operatori autoaggiunti**.

Teorema 5.6.1. L'equazione 5.67 ha un insieme di soluzioni *completo*, nel senso che, normalizzando opportunamente le $|a\rangle$, fissata una qualsiasi $|f\rangle \in \mathcal{S}$:

- i coefficienti
$$f_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle a_i|\, f\rangle \ , \tag{5.68}$$
ottenuti facendo correre i bra $\langle a_i|$ sullo $SpdA$, soddisfano a $\sum_i |f_i|^2 < \infty$ e quindi formano un vettore nello spazio di Hilbert delle componenti l_2, i cui vettori base sono gli autovettori propri di A.

- La funzione
$$f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \langle a|\, f\rangle \ , \tag{5.69}$$
ottenuta facendo correre le distribuzioni $\langle a|$ sullo $SpcA$, e' quadrato sommabile su $SpcA$, cioe' $f(a) \in L^2(SpcA)$.

- Inoltre, $\forall\, |f\rangle\, , |g\rangle \in \mathcal{S}$ vale
$$\begin{aligned} \langle f|\, g\rangle &= \int_{a\in SpcA} da\, \langle f|\, a\rangle\, \langle a|\, g\rangle + \sum_{i\ /\ a_i\in SpdA} \langle f|\, a_i\rangle\, \langle a_i|\, g\rangle \\ &= \int_{a\in SpcA} da f(a)^\star g(a) + \sum_{i\ /\ a_i\in SpdA} f_i^\star g_i \end{aligned} \tag{5.70}$$

dove per comodità si è supposto che *non* ci sia degenerazione.

Talvolta per abbreviare si usa la notazione seguente:
$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_{SpA} da \stackrel{\text{def}}{=} \int_{SpcA} da + \sum_{i\ /\ a_i\in SpdA} \ .$$

Ricordando la proprieta' 8 del §4.4 e che gli $|a\rangle$ sono ovviamente linearmente indipendenti fra loro, la 5.70 permette di dire che le $|a\rangle$ formano un sistema ONC (generalizzato):
$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_{SpA} da\, |a\rangle\, \langle a| = \mathbf{1} \tag{5.71}$$

Una prima osservazione meramente tecnica, e' che i vettori $|f\rangle$ e $|g\rangle$ devono appartenere a $\mathcal{S}$ e non essere generici elementi di $\mathcal{H}$; la ragione di cio' e' che, se $a \in SpcA$, $\langle a|$ e' una distribuzione e quindi $\langle a|\, f\rangle$ ha senso solo se $|f\rangle$ e' una funzione di prova. Vedremo piu' oltre che non e' difficile superare questa limitazione ed estendere il teorema 5.6.1 al caso che piu' ci interessa, con $|f\rangle$ e $|g\rangle \in \mathcal{H}$. Ma prima di tutto concentriamoci sul significato del teorema 5.6.1.

Qualora l'operatore autoaggiunto A abbia solo spettro discreto (per esempio $-i\frac{d}{dx}$ su $L^2(-\pi,\pi)$ con condizioni al contorno periodiche, oppure l'hamiltoniana quantistica dell'oscillatore armonico), la 5.68 non e' altro che la definizione dei coefficienti di Fourier di un generico vettore astratto $|f\rangle$ ($\in \mathcal{S}$) nella base ortonormale degli autovettori (propri) di A e la 5.70 e' la corrispondente equazione di Parseval. In altre parole il teorema ci dice che, qualora un operatore autoaggiunto A abbia **solo spettro discreto**, l'insieme dei suoi autovettori, opportunamente normalizzato, forma un sistema ortonormale (ma questo lo sapevamo gia') e sopratutto **completo**.

Il teorema 5.6.1 non e' che la generalizzazione di questa affermazione al caso in cui sia presente anche (o solo) spettro continuo.

Il piu' semplice esempio di operatore autoaggiunto con spettro continuo e' l'operatore di posizione X (su $L^2(\mathbb{R})$, per esempio); detti $|x\rangle \in \mathcal{S}'$ gli autovettori generalizzati di X, la 5.69
$$f(x) = \langle x|\, f\rangle \tag{5.72}$$

non e' che la rappresentazione del vettore astratto $|f\rangle$ ($\in \mathcal{S}$ per ora) nello spazio delle configurazioni $L^2(SpcX) \equiv L^2(\mathbb{R})$, cioe' come una funzione di x; la 5.70

$$\langle f|\, g\rangle = \int dx f^\star(x) g(x) \tag{5.73}$$

non fa che riprodurre la definizione di prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$.

La normalizzazione delle $|x\rangle$ che da' le 5.72 e le 5.73 e' naturalmente quella della δ di Dirac; piu' precisamente scrivendo l'equazione agli autovalori[16]

$$X\,|x_0\rangle = x_0\,|x_0\rangle$$

nello spazio delle configurazioni:

$$x\delta_{x_0}(x) = x_0\delta_{x_0}(x)\ ,$$

si sceglie come soluzione

$$\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) \in \mathcal{S}'$$

cosicche' la 5.72 diventa $f(x) = \langle \delta_x, f\rangle = \int dx'\delta(x' - x) f(x')$. Si constata qui che il fatto che la δ di Dirac, come ogni distribuzione, possa agire solo su funzioni di prova e' all'origine della limitazione (provvisoria) nel teorema 5.6.1 a $|f\rangle\, , |g\rangle \in \mathcal{S}$.

L'altro esempio paradigmatico di operatore autoaggiunto con spettro solo continuo e' $P = -i\frac{d}{dx}$ su $L^2(\mathbb{R})$. Le autofunzioni generalizzate di P, opportunamente normalizzate, sono

$$\varphi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{S}', \quad k \in \mathbb{R} = SpcP\ ,$$

che rappresentano nello spazio delle configurazioni gli autovalori generalizzati $|k\rangle$.

La 5.69

$$F(k) = \langle k|\, f\rangle \tag{5.74}$$

non e' che la rappresentazione nello spazio dei momenti del generico vettore $|f\rangle$ ($\in \mathcal{S}$ per ora). La 5.74 scritta nello spazio delle configurazioni diventa

$$F(k) = (\varphi_k, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} f(x) dx$$

e quindi $F(k)$ e' la trasformata di Fourier di $f(x)$.

La 5.70

$$\langle f|\, g\rangle = \int dk F^\star(k) G(k)\ ,$$

confrontata con la definizione 5.73 di prodotto scalare nello spazio delle configurazioni non e' che l'equazione di Parseval per la trasformata di Fourier.

[16] Chiamiamo qui x_0 l'autovalore per riservare il simbolo x alla variabile corrente.

Naturalmente esistono anche operatori autoaggiunti con spettro misto,cioe' in parte discreto in parte continuo, ma ne lasciamo la discussione alla meccanica quantistica visto che gli esempi di maggiore interesse sono le hamiltoniane che ammettono sia stati legati che stati di scattering.

....

Esempio 5.6.2. $A = X$

$$X\,|x_0\rangle = x_0\,|x_0\rangle\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$|x_0\rangle$ e' rappresentato da$\delta(x - x_0)$ perchè $x\delta(x - x_0) = x_0\delta(x - x_0)$

Per la5.70 si ha che

$$\Rightarrow \langle\varphi|\ \psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\varphi^\star(x)\psi(x) \quad \forall\varphi,\psi \in \mathcal{S}$$

$$\langle x_0|\ g\rangle = \langle\delta(x - x_0)|\ g(x)\rangle = g(x_0), \quad \forall g \in \mathcal{S}$$

Lo generalizzo a$\psi \in L^2$

$$\langle x|\ \psi\rangle = \psi(x)$$

ma vale solo q.o. e per essere raffinati nel senso della 5.4.8 (???).

Esempio 5.6.3. Se$\{|i\rangle \in L^2\}$, sistema ONC (per esempio funzioni associate di Hermite) allora è

$$\langle x|\ i\rangle = \psi_i(x) \text{ 'matrice' unitaria.}$$

$$\int dx\psi_i^\star(x)\psi_j(x) = \langle i|\ x\rangle\,\langle x|\ j\rangle = \delta_{i,j}$$

$$\sum_i \langle x|\ i\rangle\,\langle i|\ y\rangle = \delta(x - y).$$

Inoltre, dato che$\forall\,|\psi\rangle \in L^2 \exists\{|\psi_n\rangle \in \mathcal{S}\}$ tale che

$$|\psi\rangle = \lim_{n\to\infty} |\psi_n\rangle$$

inL^2 e pertanto

$$\psi_n(a) \equiv \langle a|\ \psi_n\rangle \in L^2(a)$$

con$\psi_n(a)$ successione di Cauchy in$L^2(a)$. Infatti

$$|||\psi_n\rangle - |\psi_m\rangle||_{L^2}^2 = ||\psi_n(a) - \psi_m(a)||_{L^2(a)}^2 =$$

$$\equiv ((\langle\psi_n| - \langle\psi_m|)\,(|\psi_n\rangle - |\psi_m\rangle))$$

$$\Rightarrow \exists\psi(a) \underset{q.o.}{=} \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ \psi_n(a)$$

Definizione 5.6.1.

$$\psi(a) = \langle a|\ \psi\rangle \in L^2(a) \quad \text{con } \langle a| \in \mathcal{S}', |\psi\rangle \in L^2$$

Quindila5.70implicache

$$\langle\varphi|\ \psi\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{SpA} da\varphi^\star(a)\psi(a), \quad \text{con } |\varphi\rangle\,, |\psi\rangle \in L^2 \tag{5.75}$$

edunoperatore$A$applicatoadunagenerica$|\psi\rangle \in L^2$

$$\begin{aligned} A\,|\psi\rangle &= A\sum\!\!\!\!\!\!\!\int da\,|a\rangle\,\langle a|\ \psi\rangle \\ &= \sum\!\!\!\!\!\!\!\int da\cdot a\,|a\rangle\,\langle a|\ \psi\rangle \\ &= \sum\!\!\!\!\!\!\!\int da\cdot a\psi(a)\,|a\rangle \end{aligned}$$

Pertantose$A\,|\psi\rangle = |\varphi\rangle$siha$\varphi(a) = \langle a|\ \varphi\rangle = a\psi(a)$;aquestopuntosipresentanoleduepossibilita':

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi\rangle \in \mathcal{D}_A \Rightarrow A\,|\psi\rangle \in L^2 \\ |\psi\rangle \notin \mathcal{D}_A \Rightarrow A\,|\psi\rangle \notin L^2 \end{array} \right. \text{, con } |\psi\rangle \in L^2, A\,|\psi\rangle \in \mathcal{S}'$$

.....????allora$A\,|\psi\rangle \in L^2$.

Seinvece$|\psi\rangle \in L^2$, $|\psi\rangle \notin \mathcal{D}_A$,allora$a\psi(a) \notin L^2$mahaancorasenso

$$\langle g|\,A\,|\psi\rangle\,,\ \forall\,\langle g| \in \mathcal{S}$$

equindi$A\,|\psi\rangle \in \mathcal{S}'$.

Ulterioriesempi:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2$,ma$xf(x) \notin L^2ma\in \mathcal{S}'$(localmentesommabileenoncrescenteper$x \to \infty$).

$f(x) \in L^2$ma$\notin \mathbb{C}$;nonèderivabile,ma$-if' \in \mathcal{S}'$;oppurenefacciolatrasformatadiFourier:$F(k) \in L^2$,cioèlasviluppponelleautofunzionigeneralizzate$\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$dell'operatore$\left(-i\frac{d}{dx}\right)$edallora$kF(k) \notin L^2$,ma$kF(k) \in \mathcal{S}'$.

Bibliografia

[1] M.B.Barbaro, M.L.Frau, S.Sciuto *Introduzione ai metodi matematici della Fisica*; Dipartimento di Fisica Teorica dell' universitá di Torino, 2001.

[2] S.Sciuto, *Metodi Matematici della Fisica* Dipartimento di Fisica Teorica dell'universita' di Torino.

[3] G.Sartori, *Lezioni di Meccanica Quantistica*; Libreria Cortina, 1998.

[4] A.N.Kolmogorov- S.V.Fomin *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*; Edizioni MIR, 1980.

[5] V.S.Vladimirov *Equation of Mathematical physics*; Edizioni Dekker, 1971.