

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

## IL SISTEMA CARDIO-CIRCOLATORIO

### **Funzioni**

La funzione principale del sistema cardio-circolatorio è quella di trasportare in ogni punto dell'organismo le sostanze utili al metabolismo delle cellule e di asportare da ogni punto le sostanze di scarto. Le principali sostanze utili sono l'ossigeno, il glucosio, gli aminoacidi, gli acidi grassi, le vitamine, l'acqua, che sono essenziali per la vita delle cellule. e gli ormoni. che sono parte essenziale del sistema di regolazione del metabolismo cellulare.

Il trasporto di tutte queste sostanze non può fondarsi esclusivamente sulla diffusione passiva per gradiente di concentrazione negli organismi. come quello umano. che hanno dimensioni superiori al millimetro. Infatti una particella in soluzione, che si muove solo per diffusione. percorre una certa distanza. in una certa direzione, in un tempo proporzionale al quadrato della distanza stessa. Per distanze dell'ordine del cm il tempo di percorrenza è dell'ordine delle ore.

È quindi necessario un sistema ad hoc, come appunto il sistema cardiocircolatorio, per trasportare rapidamente le sostanze dai punti di produzione o di entrata nell'organismo alle immediate vicinanze dei punti di utilizzazione o di eliminazione dall'organismo.

Il mezzo trasportatore è costituito da un tessuto particolare, il sangue, che viene fatto circolare in un complesso sistema di condotti, i vasi sanguigni, sotto la spinta di una pompa. il cuore, capace di trasformare energia chimica in energia meccanica.

### **Schema generale**

Il cuore è costituito da due pompe muscolari intermittenti, cuore destro e sinistro. Ciascuna pompa è costituita da due camere contrattili, il ventricolo e l'atrio. Il ventricolo destro (RV) pompa il sangue verso i polmoni e di qui nell'atrio sinistro (LA) (circolazione polmonare). Contemporaneamente il ventricolo sinistro (LV) pompa il sangue verso il resto del corpo - e di qui nell'atrio destro (RA) (circolazione Sistemica). Il sangue è costretto a seguire un percorso chiuso nel senso imposto da valvole a una via presenti nel cuore e nelle vene, come è stato stabilito per la prima volta dal medico londinese William Harvey nel libro De Motu Cordis nel 1628.

### **Circolazione polmonare**

Il sangue venoso, povero di ossigeno, entra nell'atrio destro dalle due vene maggiori, la cava inferiore.

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

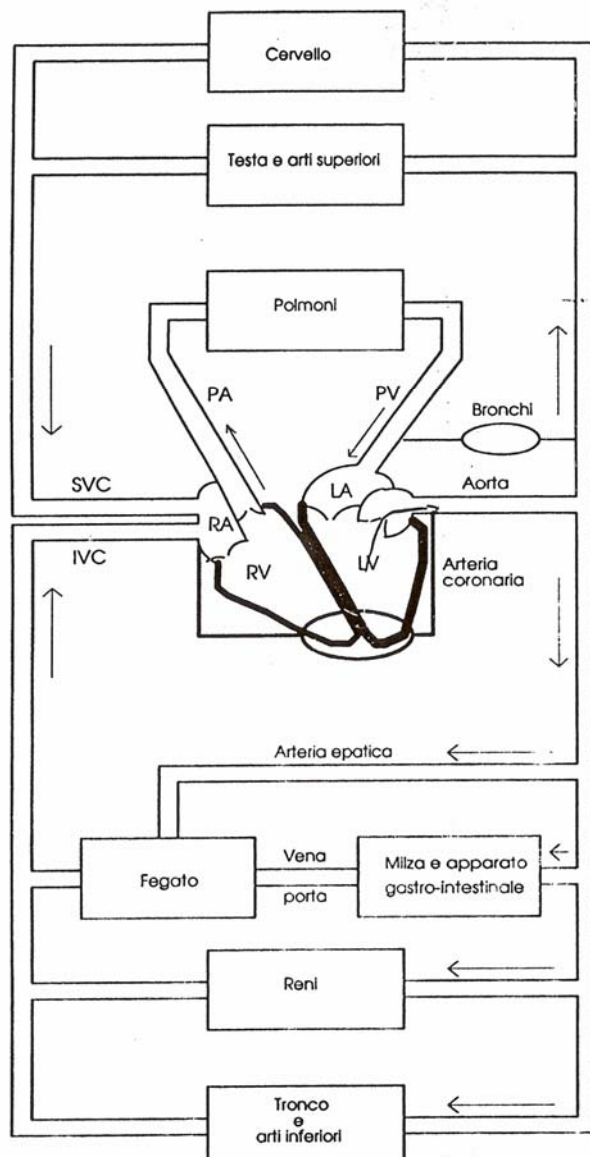
Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

133

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

(IVC) e la vena cava superiore (SVC), quindi entra nel ventricolo destro attraverso la valvola tricuspide. Il ventricolo, le cui pareti sono costituite prevalentemente di tessuto muscolare, riceve il sangue mentre è in uno stato di rilassamento detto diastole. La successiva contrazione, o sistole, spinge parte del sangue fuori dal ventricolo nell'arteria polmonare (PA), attraverso la valvola polmonare, e poi attraverso i polmoni. Qui, per diffusione, avviene lo scambio di gas con l'aria esterna. Così aumenta il contenuto di ossigeno del sangue e diminuisce quello di anidride carbonica. Attraverso le vene polmonari (PV) il sangue ossigenato ritorna al cuore nell'atrio sinistro e poi nel ventricolo sinistro.



Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

## **Circolazione sistemica**

Il ventricolo sinistro si contrae simultaneamente a quello destro iettando lo stesso volume di sangue, ma ad una pressione molto più alta. Il sangue fluisce attraverso l'aorta, le successive ramificazioni del sistema arterioso (arterie e arteriole) fino ai capillari, piccolissimi tubi con pareti sottilissime. Qui i gas e le sostanze nutritive diffondono nei tessuti circostanti. La circolazione del sangue è completata dal sistema venoso (venule e vene) che conduce il sangue di nuovo nell'atrio destro.

I sistemi circolatori ai vari organi sono generalmente in parallelo, come ad es. la circolazione cerebrale e la circolazione coronaria, ma alcuni sono in serie, come ad es. la circolazione epatica:

Si noti inoltre l'anomalia della circolazione bronchiale dove il sangue venoso, proveniente dai bronchi ritorna direttamente all'atrio sinistro, anziché all'atrio destro come per la restante circolazione sistemica.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung (“Biomechanical Properties of Living Tissues”, “Circulation”, “Motion, Flow, Stress and Growth”, “First course in Continuum Mechanics”), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

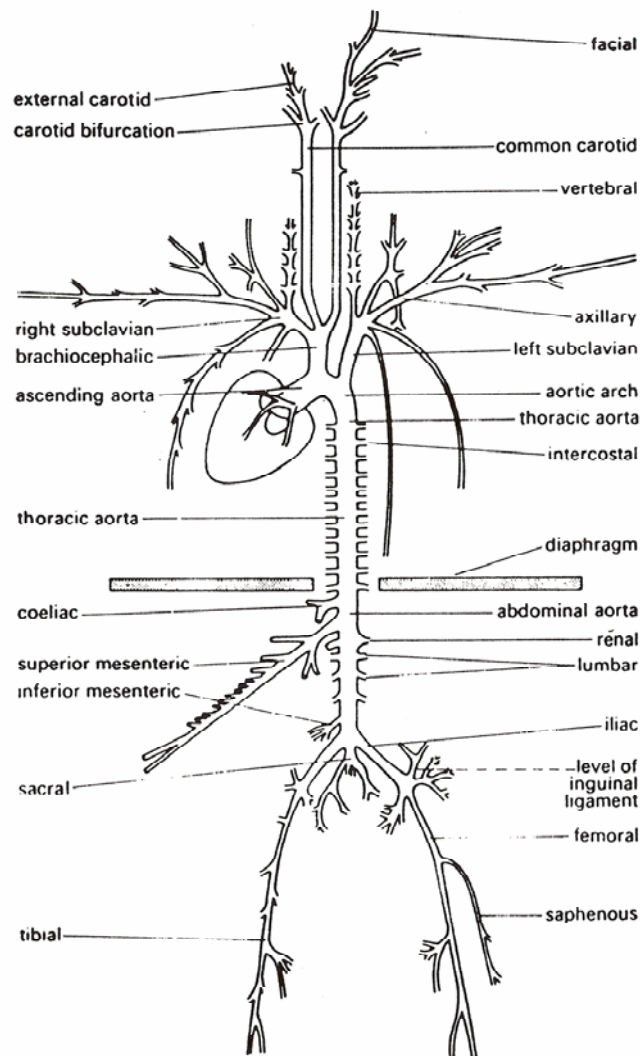


Figure 3.1:1 Major branches of the canine arterial tree. From McDonald (1974), by permission.

## Elementi di Emodinamica

Come primo passo per una chiara trattazione della funzione circolatoria, si prenderanno in esame le caratteristiche fisiche del sangue stesso e quindi i principi fisici del flusso ematico lungo i vasi, comprendendovi specialmente le interrelazioni tra pressione e flusso

Lo studio di queste interrelazioni e di altri principi fisici fondamentali della circolazione del sangue costituiscono ciò che viene definito come Emodinamica.

## Proprietà fisiche del sangue

Il sangue è un liquido viscoso costituito da cellule e da plasma. Più del 99% delle cellule sono globuli

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

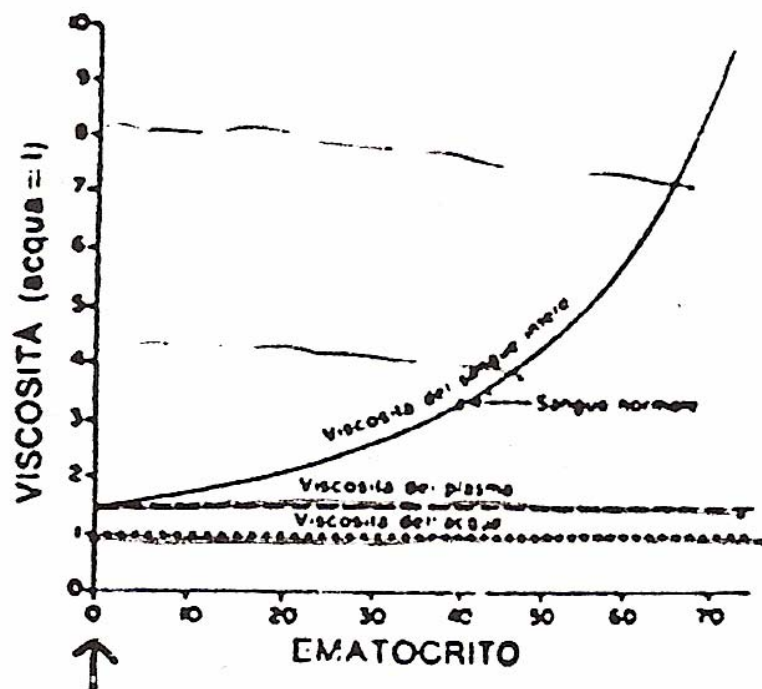
rossi e ciò significa che in pratica i leucociti quasi non partecipano a determinare le proprietà fisiche del sangue.

## Ematocrito

Si chiama ematocrito quel volume percentuale di sangue che è costituito da cellule. Così, quando si dice che un individuo ha un ematocrito di 40, significa che il 40% del volume del suo sangue è costituito da cellule, essendo il rimanente plasma. Normalmente il valore dell'ematocrito si aggira intorno a 42 nel maschio ed intorno a 38 nella femmina. Questi valori possono variare fortemente a seconda che un soggetto sia anemico, o a seconda del grado della sua attività fisica o dell'altitudine alla quale egli risiede.

### INFLUENZA DELL'EMATOCRITO SULLA VISCOSITÀ DEL SANGUE:

Il sangue è varie volte più viscoso dell'acqua e questa sua viscosità rende più difficile il suo flusso attraverso i piccoli vasi. Tanto maggiore è la percentuale di cellule nel sangue, cioè tanto più alto l'ematocrito, tanto è più grande l'attrito fra strati adiacenti del sangue, ed è questo attrito che ne determina la viscosità. Pertanto la viscosità del sangue aumenta drasticamente con l'aumentare dell'ematocrito, come mostra la figura.



Se convenzionalmente poniamo la viscosità dell'acqua pari a 1, allora la viscosità del sangue in toto con

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

ematocrito normale risulta pari a circa 3, il che significa che per spingere sangue attraverso un tubo di un determinato lume si richiede una pressione 3 volte maggiore di quella necessaria per far passare acqua attraverso lo stesso tubo. Si noti che la viscosità del sangue, quando l'ematocrito sale a 60-70, come spesso accade nella policitemia può aumentare sino a 10 volte rispetto all'acqua, ed in tal caso lo scorrimento del sangue lungo i vasi diventa estremamente difficile.

Altro fattore che influisce sulla viscosità del sangue è rappresentato dalla quantità e natura delle proteine del plasma, ma l'influenza di questo fattore è così poco importante, rispetto a quella dell'ematocrito, da non meritare particolare attenzione nella maggior parte degli studi di emodinamica. La viscosità del plasma sanguigno è circa 1.5 volte quella dell'acqua.

## **Plasma**

Il plasma fa parte dei liquidi extracellulari dell'organismo. È pressochè identico al liquido interstiziale che si trova negli spazi intercellulari, ma con una sostanziale differenza: il plasma contiene circa 7 grammi per cento di proteine, mentre il liquido interstiziale ne contiene in media 2 grammi per cento. Questa differenza è dovuta al fatto che il passaggio di proteine plasmatiche attraverso i pori dei capillari negli spazi interstiziali avviene solo in scarsa misura. Ne consegue che la maggior parte delle plasma-proteine rimane nel sistema circolatorio: quel poco che ne sfugge viene alla fine restituito in circolo mediante i vasi linfatici, perciò la concentrazione proteica del plasma è circa tre volte e mezzo quella del liquido extra-vasale.

### **LE PROTEINE DEL PLASMA**

Le plasmaproteine si dividono in tre tipi principali, cioè:

Albumina	4.5 grammi
Globulina	2.5 grammi
Fibrinogeno	0.3 grammi

La principale funzione dell'albumina (e delle altre proteine di minor grado) è quella di sviluppare una pressione osmotica a livello della parete capillare. Questa pressione, nota come pressione colloid-osmotica, ostacola la fuoriuscita del liquido plasmatici dai capillari negli spazi interstiziali.

Le globulina sono distinte in 3 tipi: alfa-, beta- e gamma. Le alfa- e le beta-globuline esplicano in circolo diverse funzioni, ad esempio trasportano sostanze con le quali si combinano agendo come

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

substrati per la formazione di altre sostanze, e veicolando da una parte all'altra dell'organismo anche molecole proteiche. Le gamma-globuline, ed in minor grado anche le beta-globuline, rivestono un ruolo molto importante nei processi di difesa contro le infezioni, in quanto sono queste globulina che principalmente costituiscono gli anticorpi, e che si ad agenti infettivi e tossici, determinando ciò che definiamo immunità.

Il fibrinogeno del plasma è di fondamentale importanza per la coagulazione del sangue.

### **DEFINIZIONE DEL PROBLEMA FLUIDODINAMICO**

Assumiamo per il sangue che sia:

- Continuo
- Omogeneo
- Isotropo
- Incomprimibile
- Fluido viscoso newtoniano

Per il flusso assumiamo che sia non turbolento.

Dalle equazione di Eulero del moto e dalle equazioni costitutive del fluido otteniamo le equazioni di Navier-Stokes. Da queste, unitamente alle equazioni di continuità ed alle condizioni iniziali e al contorno possiamo ottenere i profili di velocità e di pressione.

### **DIFFICOLTÀ PRINCIPALI**

- Termini non lineari delle accelerazioni convettive
- Condizioni al contorno dipendenti generalmente da qualche variabile interna

Nel caso ad esempio di un tubo rigido la pressione decadrà linearmente come già visto, nel caso invece di un tubo a pareti deformabili la caduta di pressione condiziona le caratteristiche della parete, da cui si avrà una conicizzazione del tubo, che a sua volta indurrà delle accelerazioni convettive che influenzeranno il profilo di pressione ...

La soluzione del problema accoppiato fluidodinamica-moto della parete ammette soluzione analitica solo in casi speciali (modelli linearizzati, flusso stazionario...). La simulazione di condizioni realistiche richiede l'uso di metodi numerici:

- Differenze finite
- Metodi agli elementi finiti

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

- Modelli di ordine ridotto

## ***Modelli mono-dimensionali***

**PREMESSA.** Obiettivo degli studi di fluidodinamica cardiovascolare è quello di predire pressione, velocità e stato tensionale in funzione del tempo e della posizione a partire da un modello realistico della geometria vascolare e del comportamento delle strutture interagenti, il sangue e la parete del vaso.

### **Analisi in due fasi**

La **prima** consiste nella predizione degli andamenti temporali della pressione e del flusso in varie sezioni del sistema, legati ad esempio ai fenomeni di propagazione d'onda. Ragionevoli predizioni possono essere ottenute mediante modelli monodimensionali della circolazione in condizioni non stazionarie.

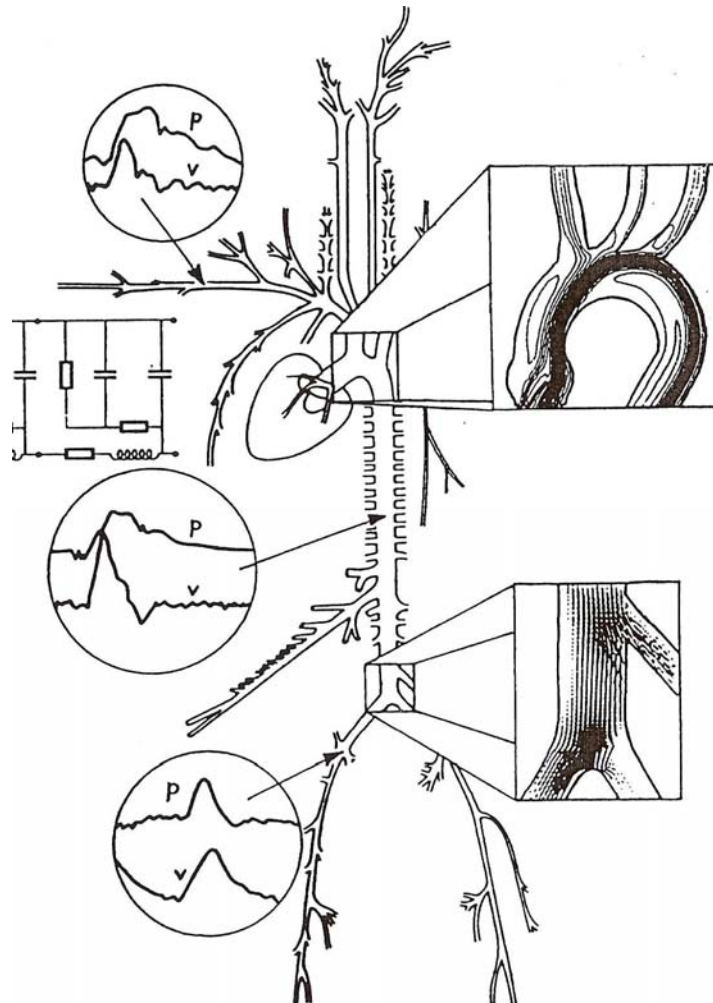
La **seconda** fase consiste nella descrizione dei fenomeni locali a partire dal modello fluidodinamico completo e dalle condizioni al contorno (pressione e flusso) ottenute nella prima fase.

Il modello monodimensionale si presta particolarmente a mettere in evidenza i tre effetti fisici rilevanti del moto del sangue e della parete in un'arteria:

- Effetto resistivo
- Effetto elastico
- Effetto inerziale



Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



**Figura:** Parte dell'albero arterioso. Sulla sinistra è mostrato un esempio di modello elettrico della rete arteriosa del braccio. Con tali modelli elettrici si possono valutare gli andamenti delle pressioni e delle velocità quali quelli mostrati relativamente all'arteria succlavia destra, all'aorta addominale e all'arteria iliaca comune. Gli ingrandimenti mostrano i risultati di analisi condotte con il metodo degli elementi finiti e relativi al flusso locale nell'arco aortico e nella biforcazione iliaca.

### **Parametri distribuiti e concentrati**

Un sistema si dice a parametri distribuiti quando le proprietà fisiche sono distribuite spazialmente con continuità (mezzo continuo). Tutti i sistemi naturali sono a parametri distribuiti.

Un modello descrittivo del sistema può essere invece a parametri distribuiti (ordine infinito quando i parametri distribuiti sono di natura elastica ed inerziale) o concentrati (ordine finito) a seconda degli scopi e del grado di finezza desiderata nella descrizione.

Un modello a parametri concentrati (*lumped parameters*) è una astrazione matematica. In esso i parametri sono distribuiti spazialmente in modo discreto, cioè tutto l'effetto elastico, inerziale o resistivo è concentrato in un unico punto e rappresenta globalmente il comportamento di un certo

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

distretto. I modelli a parametri concentrati sono tra i più usati quando:

- si vuole studiare, ai valori medi, l'interazione tra le pompe cardiache ed i sistemi circolatori
- si vogliono rappresentare in modo sintetico le proprietà di un distretto che costituisce il carico di una arteria nella quale si vuole studiare la propagazione
- si vogliono individuare parametri dotati di significato fisico e clinico identificabili a partire dalle misure disponibili

A volte vengono utilizzati modelli ibridi, caratterizzati cioè da una parte a parametri distribuiti, sede ad esempio di fenomeni di propagazione, e da una parte a parametri concentrati, costituente ad esempio il carico della precedente.

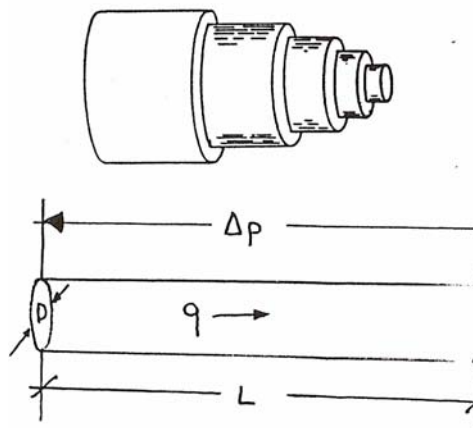
## Effetto resistivo

### MOTO STAZIONARIO EQUAZIONE DI POISEUILLE

**J.L.M.Poiseuille** (1842) Studiò l'idrodinamica in tubi capillari di vario diametro. La relazione fondamentale alla quale pervenne sperimentalmente, e che oggi conosciamo come legge di Poiseuille, si riferisce al moto laminare stazionario di un fluido viscoso newtoniano in un tubo cilindrico rigido di diametro  $D$  e lunghezza  $L$ :

$$q = \frac{KD^4 \Delta p}{L}$$

dove  $\Delta p$  è la differenza di pressione ai capi del tubo e  $q$  la portata risultante.



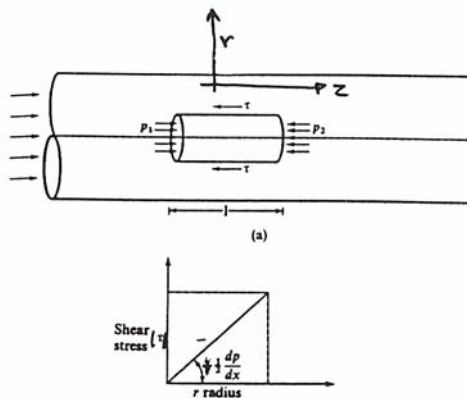
**Hagenbach** (1860) diede probabilmente la prima definizione di viscosità del fluido,  $\mu$ , in termini di coefficiente di proporzionalità tra sforzo di taglio tra le lamine fluide e gradiente radiale di velocità

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

$$\tau = \mu \frac{dw}{dr} (< 0)$$

Inoltre, imponendo il bilancio tra la forza risultante dagli sforzi di taglio agenti esternamente ad una lamina di raggio  $r$  ( $\tau 2\pi r dz$ ) e quella derivante dal gradiente di pressione longitudinale ( $+ \pi r^2 dp$ ), trovo il seguente andamento dello sforzo di taglio

$$\tau = + \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} (< 0)$$



che si annulla in corrispondenza dell'asse ed è massimo alla parete.

Uguagliando le due espressioni di  $\tau$ , integrando ed imponendo la condizione di aderenza alla parete si ottiene il ben noto profilo parabolico.

Integrando la velocità sulla sezione circolare si ottiene infine l'equazione, detta anche di Hagen-Poiseuille:

$$\Delta p = \frac{8\mu L}{\pi a^4} q = RLq$$

dove  $\mu$  è il coefficiente di viscosità del fluido e

$$R = \frac{8\mu}{\pi a^4}$$

è la resistenza di Poiseuille per unità di lunghezza.

È evidente a questo punto che il coefficiente  $K$  trovato sperimentalmente da Poiseuille equivale a

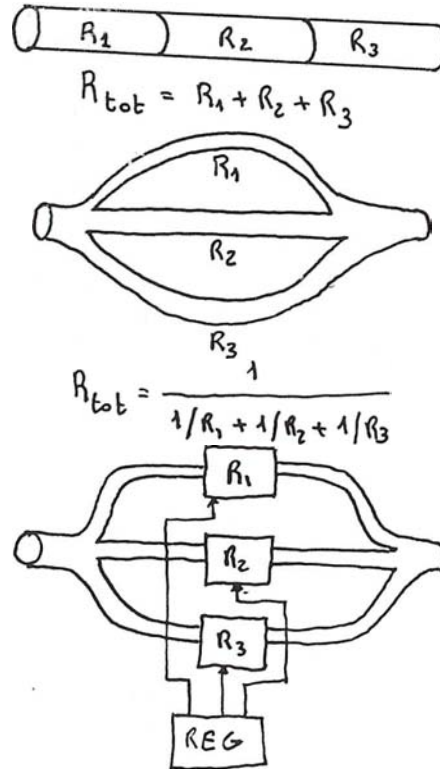
$$\frac{\pi}{128\mu}$$

Questa equazione dimostra che il raggio  $a$  è il parametro più efficace per il controllo della resistenza.

Una riduzione del raggio di un fattore 2 aumenta la resistenza 16 volte. Nella circolazione periferica le

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

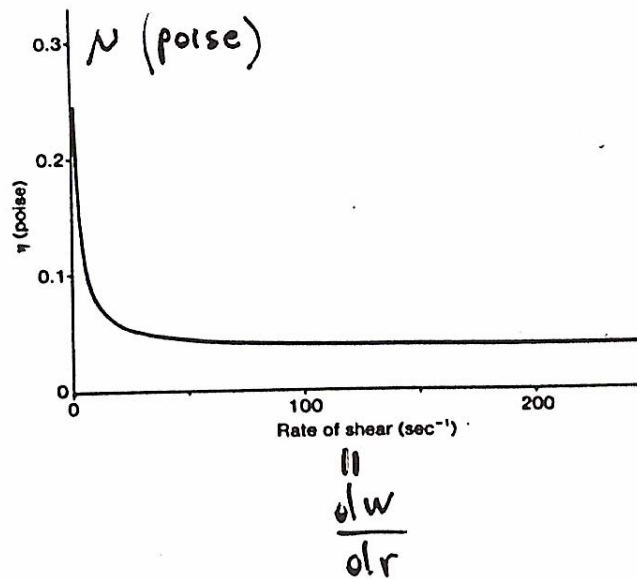
arteriole hanno nella loro parete uno strato muscolare liscio attraverso il quale viene modulata la resistenza idraulica del distretto e quindi la distribuzione dei flussi.



L'unità di misura della viscosità è il poise.

Il coefficiente di viscosità dell'acqua, a  $p=1$  atm e  $t = 20^\circ$  C, vale 0.01 poise. Il sangue non è rigorosamente newtoniano ma, eccetto che per la microcircolazione, è possibile assumere una viscosità equivalente dell'ordine di 0.03-0.04 poise a  $37^\circ$  C.

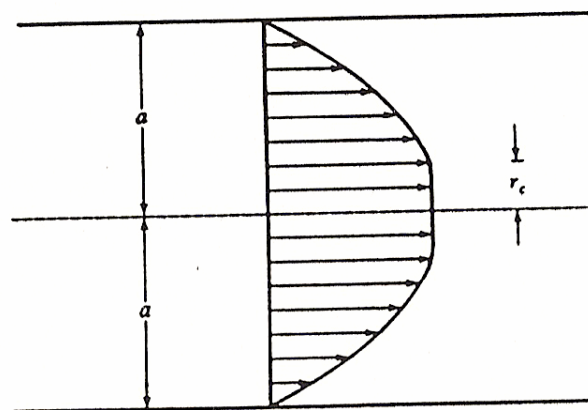
Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



### Applicabilità dell'equazione di Poiseuille alla circolazione

- **Fluido newtoniano.** Con l'esclusione ovvia della microcircolazione, l'ipotesi di viscosità newtoniana è probabilmente valida per il sangue con errori valutabili teoricamente nell'ordine dell' 1-2%.

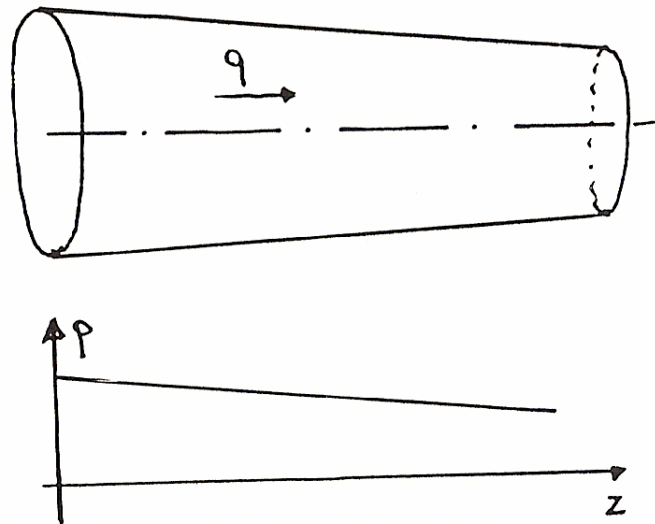
La viscosità del sangue dipende sensibilmente dall'ematocrito in sospensione. Quando il gradiente di velocità diminuisce, per esempio vicino all'asse, l'aggregazione aumenta e così la viscosità, per cui il profilo si appiattisce.



- **Tubo cilindrico, uniforme.** Questa ipotesi è in alcuni vasi molto forte, vuoi per la conicità naturale dell'arteria che per quella indotta dal gradiente di pressione prossimale-distale nel caso

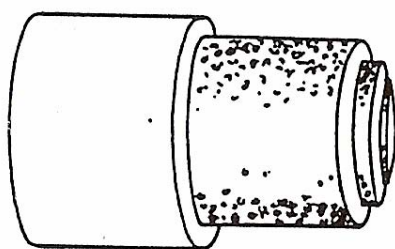
Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna. Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

di parete elastica. Anche in condizioni stazionarie, il legame tra gradiente pressorio e portata diventa non lineare e quindi non più descrivibile con l'equazione di Poiseuille.

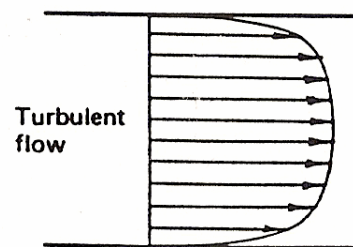


Gli errori introdotti da questa approssimazione devono essere valutati caso per caso.

- **Moto laminare.** Questa condizione è verificata per la maggior parte del ciclo in tutto il letto vascolare, anche se il profilo non rimane parabolico dato il regime pulsatile e l'elasticità della parete. Solo nelle arterie di maggior diametro (aorta e polmonare) si possono verificare turbolenze locali peraltro ancora in fase di studio.



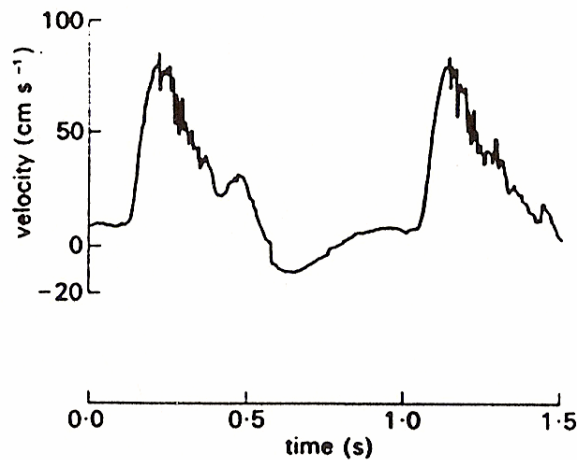
Sliding shell analog



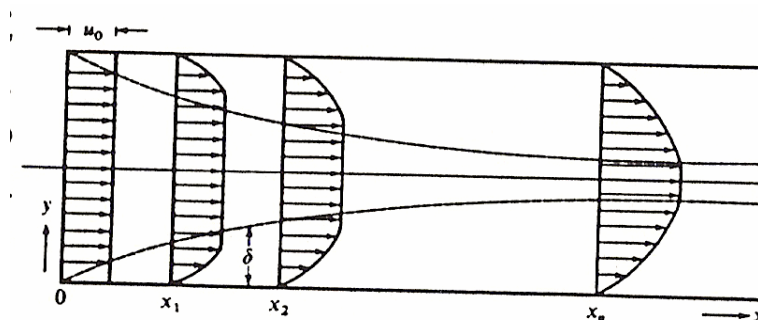
Velocity profile

- **Condizione di aderenza alla parete.** È un'ipotesi generalmente accettata come corretta.
- **Moto stazionario.** È impossibile parlare di stazionarietà in un regime pulsatile. Come vedremo però nei vasi periferici di piccolo diametro il moto diviene maggiormente stazionario.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



- **Moto irrotazionale.** Anche questa ipotesi è soddisfatta con buona approssimazione se si esclude l'arco aortico e la fluidodinamica locale di alcune diramazioni.
- **Profilo completamente sviluppato.** È di difficile valutazione in regime pulsatile. Gran parte dell'aorta è per esempio caratterizzata da un appiattimento della regione centrale del profilo prima che questo si sviluppi completamente.



## Analogia elettrica

In campo elettrico esiste una simbologia standardizzata per la rappresentazione sintetica di fenomeni resistivi, inerziali e di accumulo. È quindi frequente l'impiego dell'analogia elettrica per rappresentare fenomeni legati al trasporto di massa (volume), corrispondente nell'analogia alla carica elettrica. Si fa di solito riferimento alla seguente tabella di corrispondenza tra grandezze meccaniche ed elettriche:

### GRANDEZZE MECCANICHE

Pressione,  $p$

Flusso,  $q$

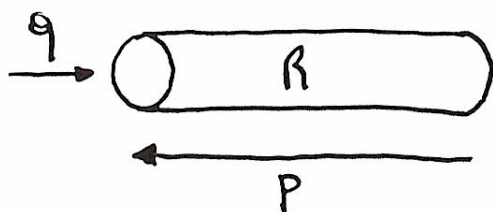
Resistenza idraulica,  $R$  ( $R=p/q$ )

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

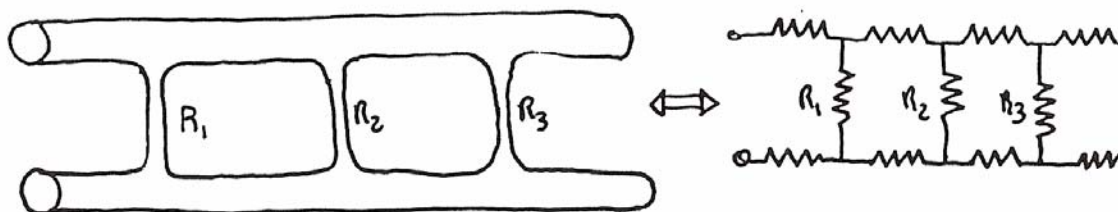
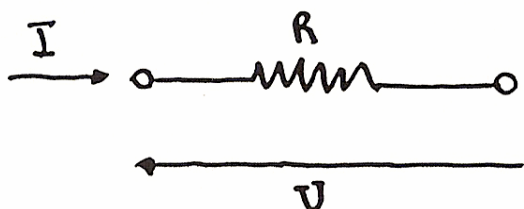


### ELETTRICHE

Tensione.  $U$

Corrente.  $I$

Resistenza elettrica,  $R$  ( $R=U/I$ )



### **Resistenza periferica, totale e distrettuale**

Gli effetti resistivi sono concentrati nei vasi periferici, arteriole, capillari e venule, dove il diametro assume valori molto piccoli. Quando non interessa un'analisi fluidodinamica locale della microcircolazione e ci si accontenta di schematizzare con un parametro concentrato l'effetto di carico che l'intera circolazione sistemica o quella distrettuale oppongono alle arterie di diametro maggiore, si fa riferimento alla cosiddetta resistenza periferica.

Ovviamente questa lega le componenti stazionarie della pressione e del flusso. Così la resistenza periferica totale, TPR, e il rapporto tra il gradiente pressorio artero-venoso e la portata media in uscita dal ventricolo sinistro, CO (litri/min). Per esempio, se  $CO=6.6$  l/min e la pressione arteriosa media  $MAP=95$  mmHg, trascurando la pressione venosa si ottiene:



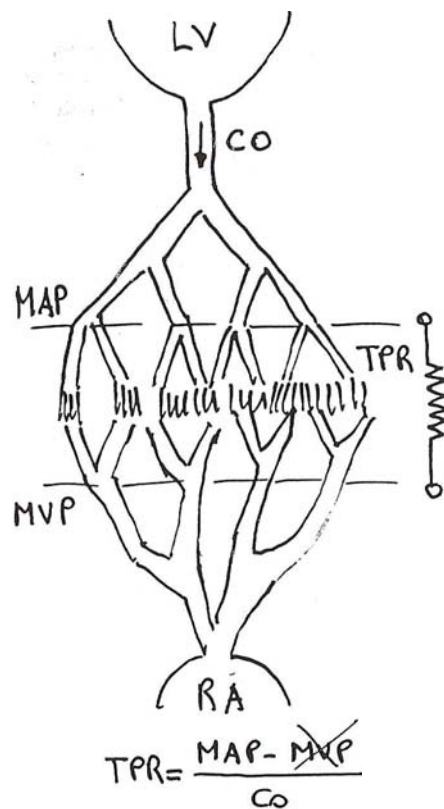
Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

$$TPR = \frac{MAP(mmHg)}{CO(l/min)} 80 = 1150 \text{ dyne} \cdot s / cm^5$$

La resistenza periferica del letto vascolare femorale si ottiene dalla stessa pressione media ma con un flusso di 0.225 l/min. Quindi:

$$FPR = \frac{95}{0.225} 80 = 33.800 \text{ dyne} \cdot s / cm^5$$

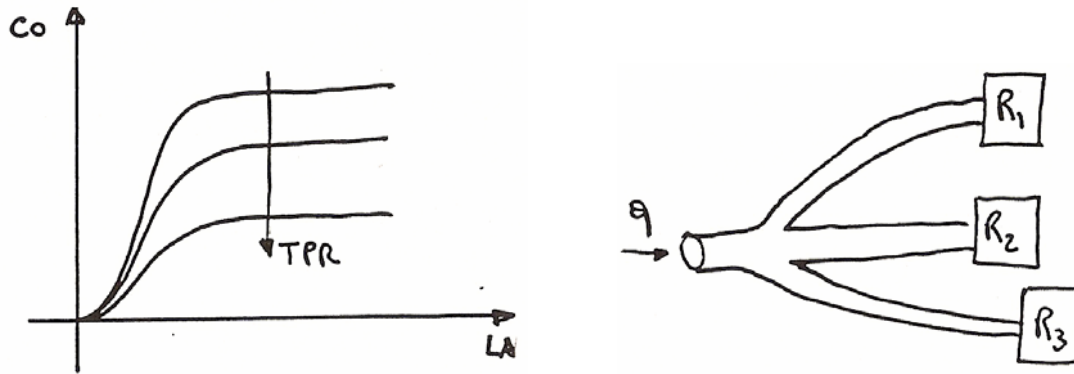
mentre quella di un capillare e dell'ordine di  $5 \times 10^{11}$  dyne s/cm<sup>5</sup>.



L'uso della TPR è fondamentale quando si vuole descrivere l'effetto di carico (a bassa frequenza) opposto dalla circolazione sistemica al ventricolo sinistro. Inoltre la TPR è uno dei parametri che può variare maggiormente, attraverso l'azione della muscolatura liscia nella parete, in risposta ai meccanismi di controllo.

Le resistenze periferiche distrettuali sono invece molto importanti quando si vuole studiare come si ripartisce il flusso tra i vari distretti o quando si vuole simulare in modo topologicamente dettagliato il comportamento del sistema circolatorio.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

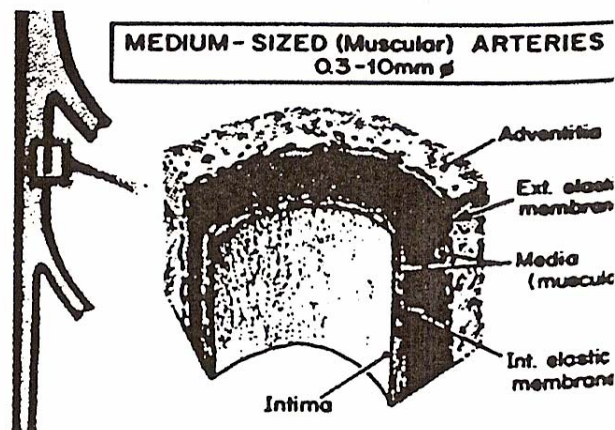


## Effetto elastico. Compliance arteriosa

### LA TEORIA WINDKESSEL

Le arterie, specialmente quelle centrali, di diametro maggiore, si deformano sensibilmente (fino al 10%) a seguito delle variazioni della pressione trasmurale. Questo fatto, rilevabile oggi con strumentazione non invasiva, è dovuto al fatto che la parete è un composito costituito da strati di materiali diversi, alcuni dei quali con proprietà elastiche (elastina), elastiche non lineari (collagen e) e viscosi (muscolo liscio).

Le variazioni temporali del diametro non sono inoltre esattamente in fase con quelle della pressione bensì in ritardo di un angolo di fase dipendente dalla frequenza e dal peso delle componenti viscosi (isteresi). Considereremo inizialmente trascurabile tale effetto.



Un comportamento dell'albero arterioso sistemico che stimolò l'immaginazione dei primi ricercatori è la somiglianza tra la circolazione arteriosa e le prime pompe per lo spegnimento degli incendi o i primi

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

organi a canne.

Entrambi sono infatti basati su un sistema di pompaggio alternativo, su una valvola monodirezionale, su un elemento elastico (aria contenuta in un contenitore rigido o sacco elastico), il cui scopo è quello di limitare le oscillazioni della pressione, e su una resistenza di uscita. In questo modo si produceva all'uscita un flusso praticamente stazionario a partire da un flusso intermittente all'ingresso.

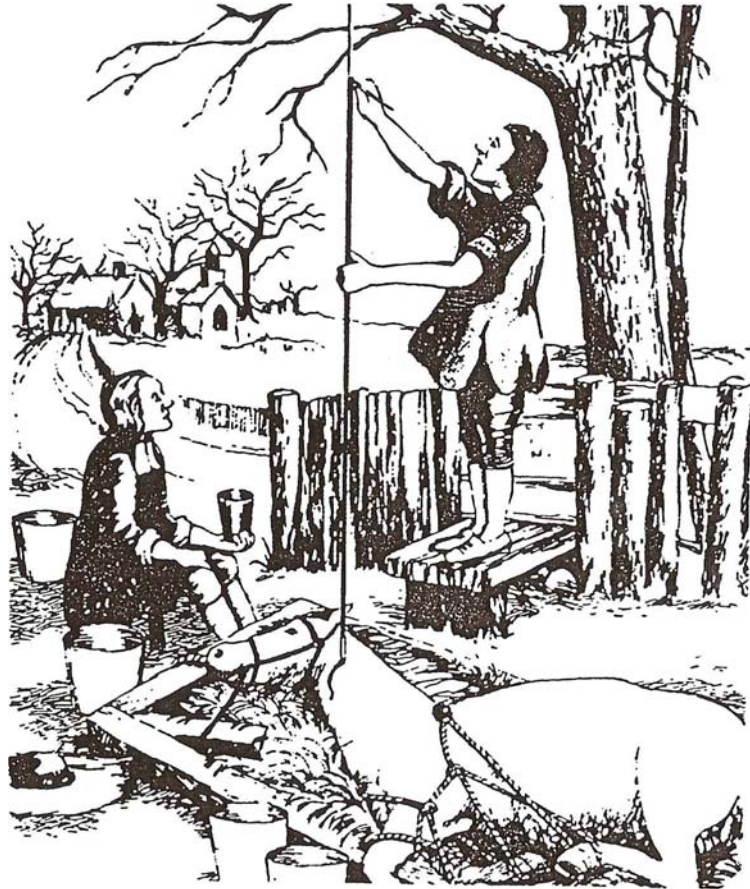
Nel 1733, Stephen Hales suggerì che questo principio forniva un semplice modello funzionale dell'albero arterioso sistemico.

Otto Frank (1899) applicò l'idea di Hales arrivando ad un modello interpretativo che chiamò windkessel (serbatoio ad aria).

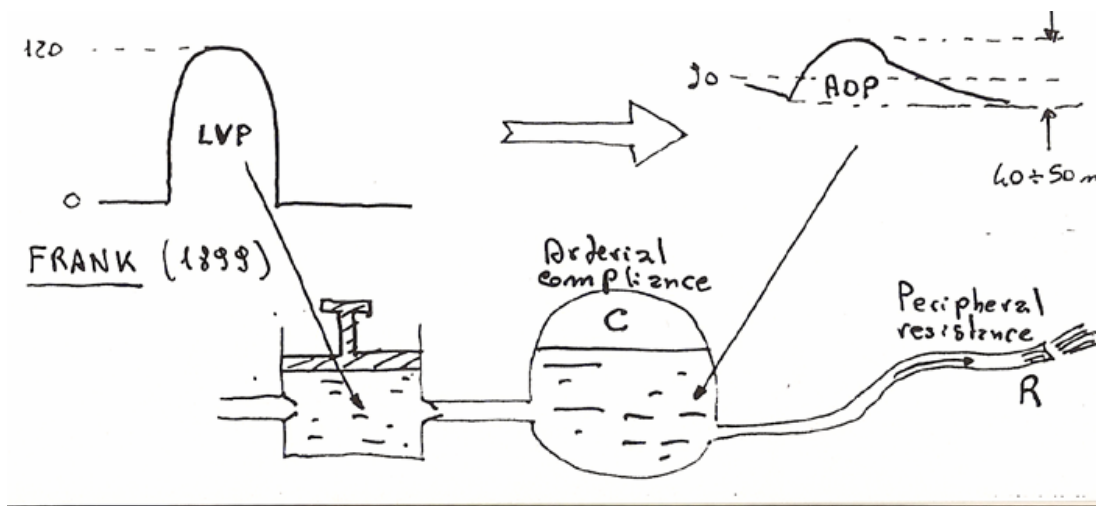
La teoria windkessel concepisce le arterie come un sistema di tubi elastici interconnessi con capacità di accumulare fluido. Il fluido entra in modo intermittente da una parte (eiezione ventricolare) mentre il flusso in uscita attraverso la resistenza periferica è approssimativamente stazionario e descrivibile con l'equazione di Poiseuille.

Nella teoria windkessel, le variazioni di pressione sono contemporanee in tutto il volume, il che equivale a dire che la velocità di propagazione delle perturbazioni pressorie è infinita. Vedremo che ciò è ragionevolmente corretto per basse frequenze dove la compliance può ritenersi un parametro concentrato.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

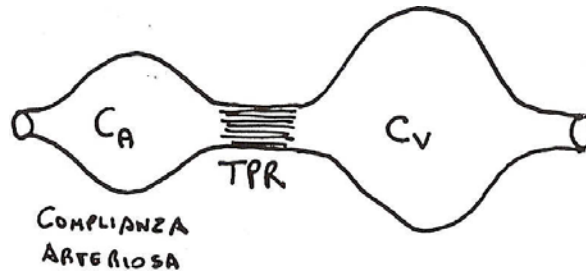


**Figura.** Il reverendo Stephen Hales, seduto, introdusse la misura invasive della pressione sanguigna nel 1733.

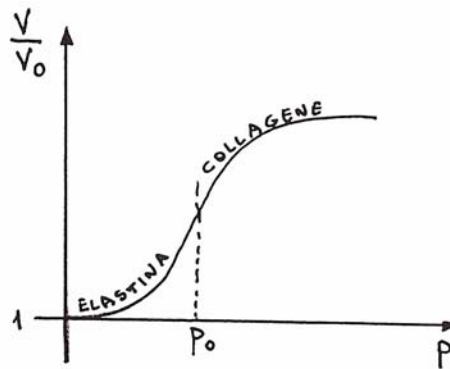


Anche se Frank ragionò sull'intera circolazione sistemica, ci si può riferire equivalentemente ad un segmento di arteria, ad una arteria, ad un distretto circolatorio, analogamente a quanto fatto per la resistenza periferica.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



Si ottiene in ogni caso un grafico che lega il volume interno,  $V$ , alla pressione trasmurale,  $p$ . Qualitativamente il grafico si presenta come una curva ad esse dove la parte a bassa pressione è dominata dalle componenti elastiche lineari (elastina) mentre la saturazione è dovuta a quelle nonlineari (collagene) che intervengono solo ad elevati valori di deformazione.



Si definisce compliance e si indica con  $C$  la pendenza della curva  $V(p)$  in corrispondenza ad un determinato punto di lavoro. È evidente che la compliance può ritenersi costante se e solo se il campo di pressione è abbastanza limitato da poter linearizzare la caratteristica  $p$ - $V$ .

Nel caso di un contenitore a parete elastica di volume  $V(t)$ , alimentato da una portata  $q(t)$ , l'equazione di conservazione della massa si scrive:

$$q = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dp} \frac{dp}{dt} = C \frac{dp}{dt}$$

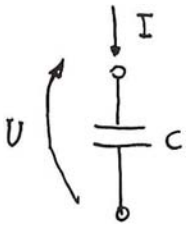
Si parlerà di compliance arteriosa totale (TAC) con riferimento all'intera circolazione sistemica.

### Analogia elettrica

Compliance,  $C$        $q = C \frac{dp}{dt}$

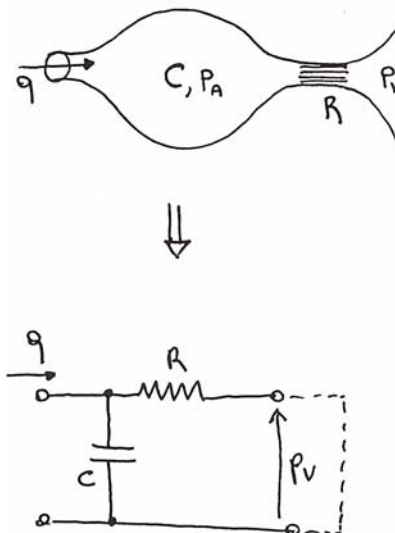
Capacità,  $C$        $I = C \frac{dU}{dt}$

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



## Modello complianza-resistenza Windkessel a 2 elementi

Gli effetti elastico e resistivo possono ora essere considerati contemporaneamente per spiegare il comportamento dinamico del carico cardiaco o gli spostamenti di volumi di fluido da un distretto ad un altro. Il risultato cui si perverrà, noto come windkessel a 2 elementi, costituisce un primo passo fondamentale per la descrizione a parametri concentrati dei distretti circolatori.



Con riferimento alla descrizione del sistema arterioso periferico, il forte interesse clinico per la relazione dinamica tra pressione e flusso all'uscita del cuore si motiva come segue:

- 1) La funzione pompante del cuore dipende fortemente dalla natura del carico emodinamico.
- 2) Le alterazioni dell'elasticità e della resistenza periferica del sistema arterioso sono legate ad importanti stati patologici.
- 3) Lo studio dei meccanismi di controllo fisiologici non possono prescindere dalla descrizione delle proprietà essenziali del carico.

## IL CARICO DEL VENTRICOLO SINISTRO (AFTERLOAD)

La pressione ventricolare sinistra oscilla tra un minimo di circa 0 mmHg ad un massimo di circa 120 mmHg. Nell' aorta, subito a valle della valvola, il valor medio della pressione si alza a circa 90 mmHg

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

e la fluttuazione diminuisce a 40-50 mmHg. Ciò dipende in larga misura dalla natura del carico.

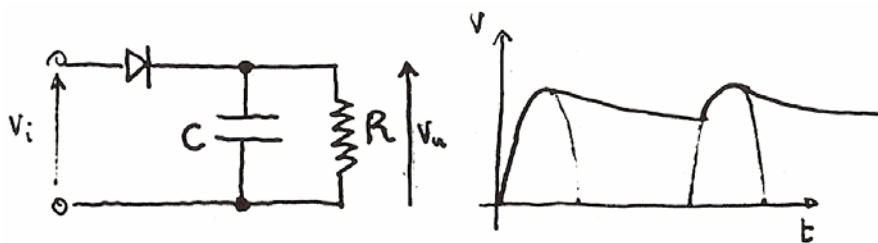
La spiegazione fu data da Stephen Bales.(1733) che per primo mise in evidenza il ruolo determinante dell'elasticità dell' aorta.

Nel. 1899 Otto Frank, nella sua teoria del sistema cardiovascolare, utilizzò un'analogia con la pompa manuale utilizzata allora dai pompieri.



Tale analogia prese il nome di WINDKESSEL (in tedesco "serbatoio d'aria"). In tale teoria, l'aorta e' rappresentata da una camera elastica e i vasi sanguigni periferici da un tubo rigido di resistenza idraulica costante.

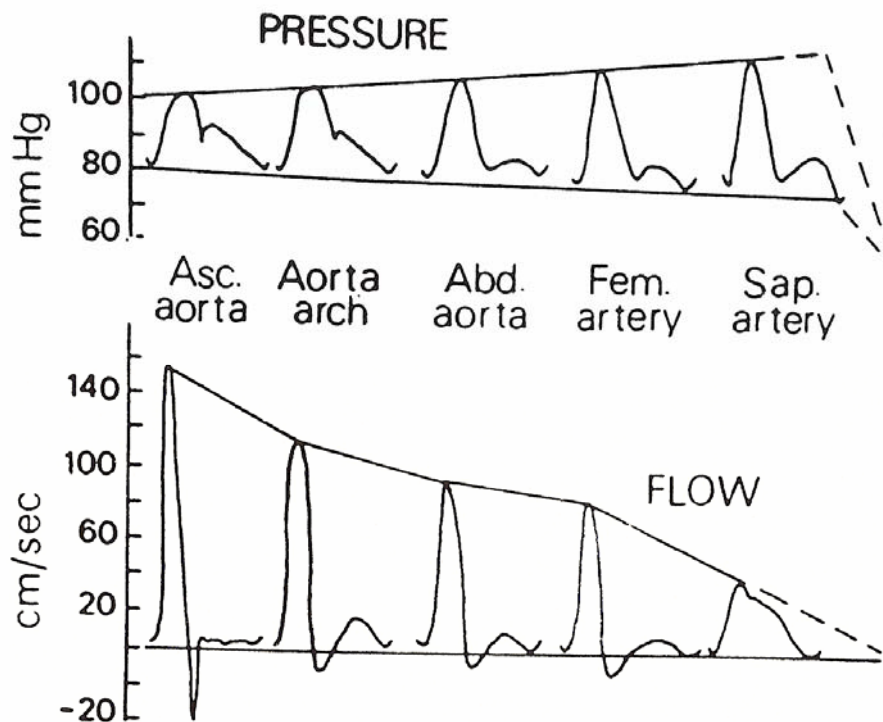
In un'analogia di tipo elettrico, le forme d'onda ricordano quelle che si ottengono applicando un rivelatore di picco ad una tensione pulsatile. Il diodo corrisponde alla valvola aortica, il condensatore e la resistenza al carico Windkessel.





Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

## Fenomeni di propagazione



In figura è presentato un confronto diagrammatico del comportamento delle pulsazioni della pressione e del flusso nelle arterie mano a mano che si allontanano dal cuore. La pressione media decade lentamente, ma le variazioni di pressione pulsatile aumentano fino a che, nell'arteria safena, possono raggiungere un'oscillazione doppia di quella alla base dell'aorta. Le oscillazioni di flusso, al contrario, diminuiscono in maniera marcata. Un tale comportamento può essere spiegato solo da una riflessione di tipo chiuso nei piccoli vasi periferici. In assenza di riflessione, l'attenuazione dovrebbe causare un decremento parallelo nelle oscillazioni di pressione e flusso. Infine, le oscillazioni della pressione devono smorzarsi, la probabile regione di tale fenomeno sono le piccole arterie e le arteriole prossimali, come indicato dalle linee tratteggiate. L'aumento nel rapporto dell'ampiezza della pressione pulsatile rispetto all'ampiezza del flusso è largamente determinato dall'incremento nell'impedenza del fluido delle componenti a bassa frequenza; il cambiamento nella forma dell'onda di pressione rispetto a quella del flusso dipende dal cambiamento nell'impedenza delle varie componenti di frequenza in funzione della loro distanza dal principale sito di riflessione, dato che l'impedenza è minima ad un quarto di lunghezza d'onda dai siti periferici.

Lo studio dell'interazione tra cuore e carico, come pure l'analisi di criteri per passare da sistema a

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.



Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

parametri distribuiti a modello a parametri concentrati richiede almeno un accenno ai fenomeni di propagazione.

## Fenomeni propagatori in un'arteria

Nei modelli monodimensionali la velocità è considerata diretta assialmente e funzione della sola coordinata assiale  $z$  oltre che del tempo  $t$ . Di conseguenza, possono essere calcolati solo i valori della pressione e della velocità medie sulla sezione trasversale del vaso. Questi modelli fanno in genere riferimento a:

- Vaso ad asse rettilineo e sezione circolare, eventualmente conico
- Parete con caratteristica elastica non lineare o anche visco-elastica
- Sangue incomprimibile e viscoso newtoniano
- Moto laminare, mono-dimensionale, non-stazionario
- Profilo completamente sviluppato
- Struttura ad albero per le arterie di diametro maggiore
- Rappresentazione semplificata della microcircolazione

Con riferimento ad un segmento di arteria con perdite laterali trascurabili. le equazioni di base sono l'equazione di equilibrio dinamico, di continuità e del moto della parete:

$$\rho \frac{\partial w_m}{\partial t} + \rho w_m \frac{\partial w_m}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} + F = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(w_m S) = 0$$

$$S = S(p, z, t)$$

dove

$z$  coordinata assiale

$t$  tempo

$p=p(z, t)$  pressione nella generica sezione  $z$

$S$  area della sezione

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

$w_m = w_m(z, t)$  velocità assiale media nella generica sezione  $z$

$\rho$  densità del sangue

$F$  rappresenta la risultante delle forze dissipative dovute alla viscosità del sangue ed è definita empiricamente mediante equazioni che la legano allo sforzo di taglio alla parete. Nel caso di profilo di velocità parabolico, il termine d'attrito risulta dato da:

$$F = \frac{8\mu w_m}{a^2}$$

dove  $\mu$  ed  $a$  sono il coefficiente di viscosità del sangue ed il raggio interno del vaso.

La struttura dell'equazione di equilibrio dinamico è identica a quella dell'equazione di Navier-Stokes relativa alla componente assiale,  $w$ , dove però il contributo delle forze viscosi è integrato sulla sezione e la velocità sostituita dal suo valor medio.

L'espressione di  $F$  per la rappresentazione delle forze viscosi si giustifica come segue. Nell'ipotesi di moto laminare stazionario in un vaso cilindrico a parete rigida, l'accelerazione (locale+convettiva) si annulla e, ricordando che  $q = Sw_m = \pi a^2 w_m$ , si ottiene infine:

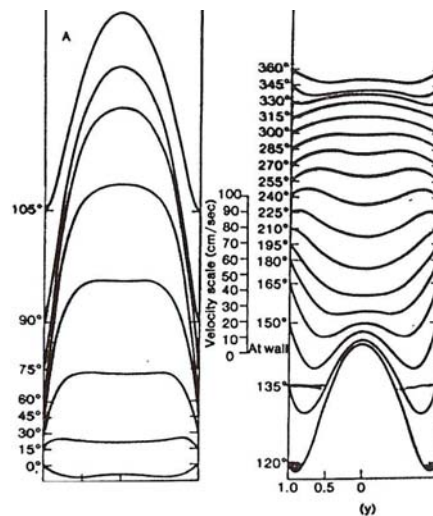
$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{8\mu}{\pi a^4} q = Rq$$

che rappresenta la ben nota equazione di Poiseuille per unità di lunghezza. Quindi la formulazione è sicuramente valida in queste condizioni, quando cioè il profilo è parabolico.

Viene da chiedersi se, in presenza di vaso a parete elastica, conico ed in condizioni non stazionarie cioè sia ancora vero. A rigore, evidentemente no: basti osservare come varia il profilo di velocità durante un ciclo cardiaco.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

### Profili di velocità



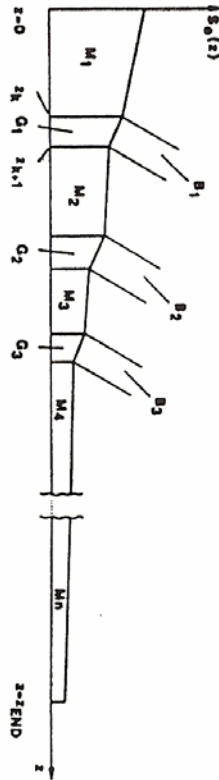
Ora però, in prima approssimazione, nelle arterie di diametro superiore al millimetro il peso del termine viscoso è trascurabile, mentre per le arterie di piccolo diametro il profilo non si discosta molto dall'andamento parabolico.

Quindi, almeno per il livello di approssimazione richiesto nella prima fase, il modello monodimensionale può ritenersi adeguato.

Anliker et al. utilizzarono il modello descritto per interpretare le variazioni morfologiche dei segnali di pressione e flusso lungo l'albero arterioso periferico. La rete che va dall'aorta al piede fu a questo scopo suddivisa in segmenti conici in cascata, di sezione via via decrescente e con parete di caratteristica elastica non-lineare. Le diramazioni, i rami laterali e le eventuali stenosi furono messi in conto con trattazioni separate che esulano però dagli scopi della presente trattazione.

Integrando numericamente il sistema di equazioni, Anliker ottenne un soddisfacente accordo qualitativo con le misure ottenute nelle varie sezioni. In particolare si aveva conferma del fatto che la pressione differenziale aumenta andando dal centro alla periferia mentre il contrario accade per il flusso.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

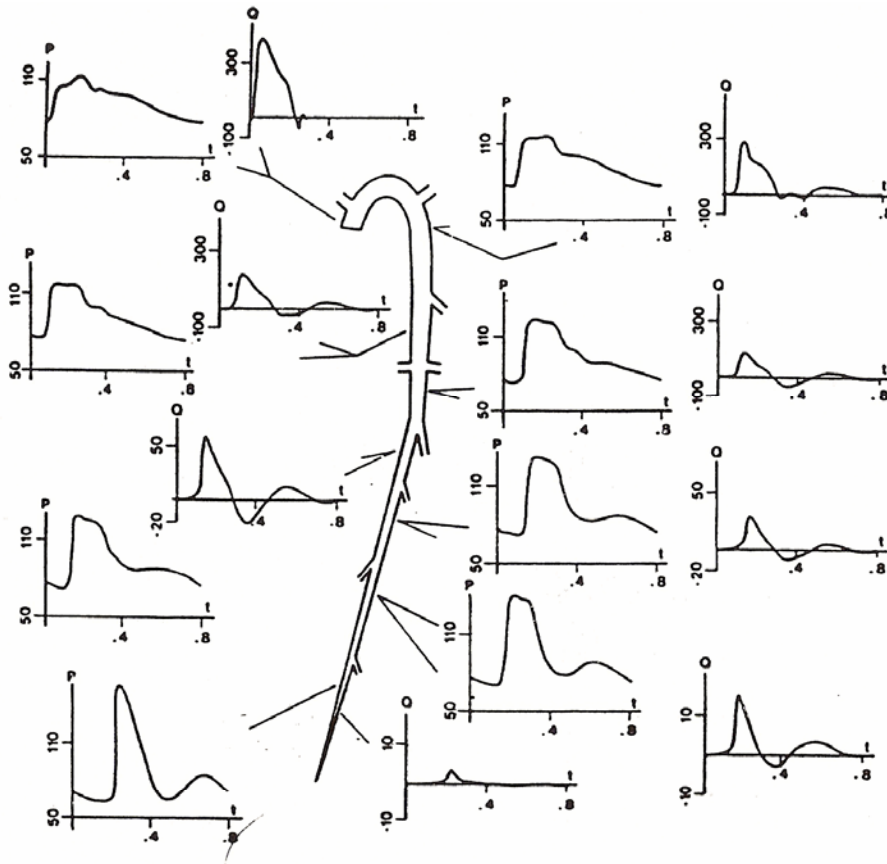


FIGURE 7. Calculated pressures and flow patterns at different locations for standard case. Pressures are given in mm Hg, and flows in ml/sec.

Arcus aortae	A. femoralis	A. dor. pedis	
			MEASURED PRESSURE (mmHg)
			CALCULATED PRESSURE (mmHg)

FIGURE 10. Comparison of measured and calculated pressure pulse curves for different locations of standard case. Measured curves adopted from Wetterer (2).

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

## Parete rigida, vaso cilindrico (S=cost)

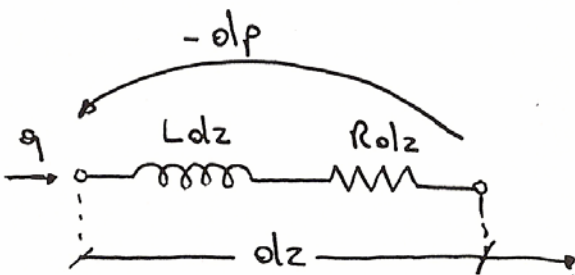
### EFFETTO VISCO-INERZIALE

Dall'equazione di continuità, la velocità media non dipende da  $z$  e ciò rende nulla l'accelerazione

convettiva,  $w_m \frac{\partial w_m}{\partial z}$ .

Ricordando che  $w_m = \frac{q}{\pi a^2}$ , si ottiene infine:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho}{\pi a^2} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{8\mu}{\pi a^4} q = L \frac{\partial q}{\partial t} + Rq$$



$L = \frac{\rho}{S} = \frac{\rho}{\pi a^2}$ , inerzia per unità di lunghezza, è proporzionale alla densità del fluido ed inversamente proporzionale all'area della sezione.

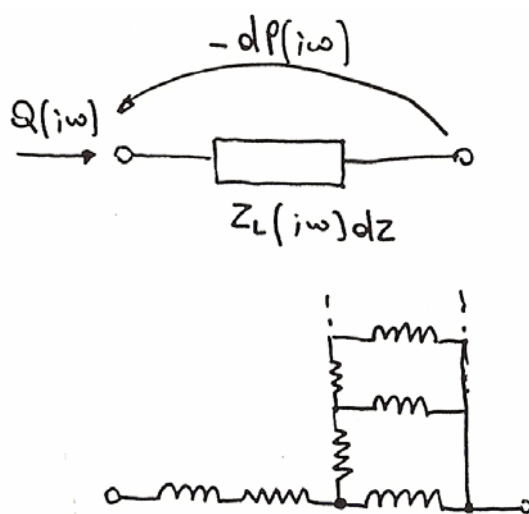
$R = \frac{8\mu}{\pi a^4}$ , resistenza di Poiseuille per unità di lunghezza, e proporzionale alla viscosità del fluido ed inversamente proporzionale alla quarta potenza del raggio.

Nel dominio delle frequenze, il gradiente pressorio è legato al flusso attraverso l'impedenza longitudinale (per unità di lunghezza):

$$Z_L = -\frac{\partial P}{\partial x} = R + j\omega L$$

L'analisi svolta da Womersley integrando le equazioni in due dimensioni ( $r, z$ ) senza imporre il profilo parabolico, ma sempre trascurando il termine convettivo, portò ad una  $Z_L$  più complessa che però si riduceva a quella trovata da noi per basse frequenze.

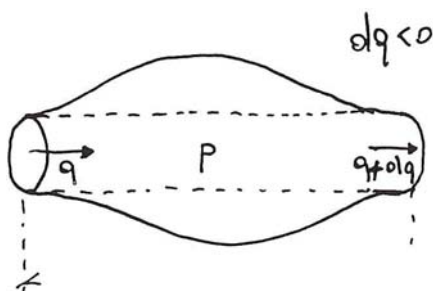
Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



### Parete elastica

Se l'area della sezione dipende dal tempo solo attraverso la pressione (materiale perfettamente elastico), l'equazione di continuità si scrive:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{dS}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = C \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0$$



ovvero

$$-\frac{\partial q}{\partial z} = C \frac{\partial p}{\partial t}$$

dove  $C$ , complianza del vaso per unità di lunghezza, rappresenta la pendenza della caratteristica S-p nell'intorno della pressione di lavoro,  $p_0$ .

Nel dominio delle frequenze, il gradiente di flusso è legato alla pressione attraverso l'ammettenza trasversale . (per unità di lunghezza)

$$Y_T = \frac{-\partial Q}{\partial z} / P = j\omega C$$

L'espressione di  $C$  in funzione del raggio dell'arteria e delle proprietà elastiche della parete può essere

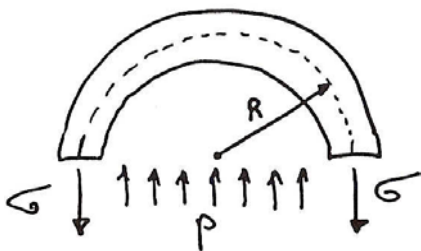
Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

calcolata in prima approssimazione facendo riferimento ad un vaso a parete sottile (spessore della parete/raggio  $< 1/10$ ). Considerando piccole deformazioni, si ottiene la seguente espressione per la complianza per unità di lunghezza:

$$C = \frac{2\pi a^3}{hE}$$

dove  $h$  ed  $E$  rappresentano rispettivamente lo spessore della parete ed il modulo di Young del materiale.

### CALCOLO DELLA COMPLIANZA DI UN VASO ARTERIOSO A PARETE SOTTILE



Per unità di lunghezza:

$$C = \frac{dS}{dp} = \frac{d(\pi R^2)}{dp} = 2\pi R_0 \left. \frac{dR}{dp} \right|_0 = 2\pi R_0^2 \left. \frac{dR/R_0}{dp} \right|_0 = 2\pi R_0^2 \left. \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma h}{R_0}} \right|_0 = 2\pi R_0^3 \frac{\varepsilon}{\sigma h} = \frac{2\pi R_0^3}{hE}$$

### **Analogia elettrica**

#### Grandezze meccaniche

Pressione,	$p$
Flusso,	$q$
Resistenza idraulica,	$R (R=p/q)$
Complianza,	$C (q=Cdp/dt)$
Inertanza idraulica,	$L (p=Ldq/dt)$

#### Grandezze elettriche

Tensione,	$V$
Corrente,	$I$
Resistenza elettrica,	$R (R= V/I)$
Capacità,	$C (I=CdV/dt)$

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.



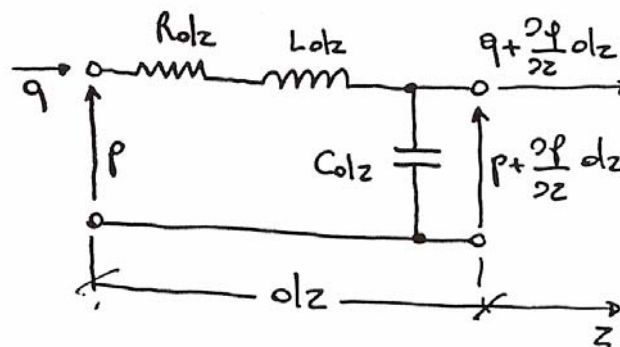
Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

Induttanza,  $L (V=LdI/dt)$

Conseguentemente, con riferimento ad un tratto di arteria di lunghezza infinitesima e nelle ipotesi citate in precedenza, gli effetti viscoso, inerziale ed elastico possono essere descritti come illustrato qui a fianco.

**Analogia con le linee di trasmissione elettriche**

È evidente che la rappresentazione RLC è solo approssimata in quanto ottenuta ipotizzando profilo parabolico e sovrapponendo gli effetti di due situazioni sperimentali contrastanti.



Tale rappresentazione linearizzata è però sufficientemente valida per lo studio dei fenomeni propagatori, per i quali l'analoga elettrica ci consente di utilizzare tutto il bagaglio di nozioni e terminologie acquisiti sulle linee di trasmissione.

L'arteria ed il sangue in essa circolante possono globalmente essere trattati come una linea di trasmissione, in prima approssimazione geometricamente e fisicamente uniforme lungo l'asse.

In regime periodico, le equazioni del tratto infinitesimo di linea sono

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -Z_L Q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -Y_T P$$

dove

$P$  trasformata di Fourier di  $p(t)$

$Q$  trasformata di Fourier di  $q(t)$

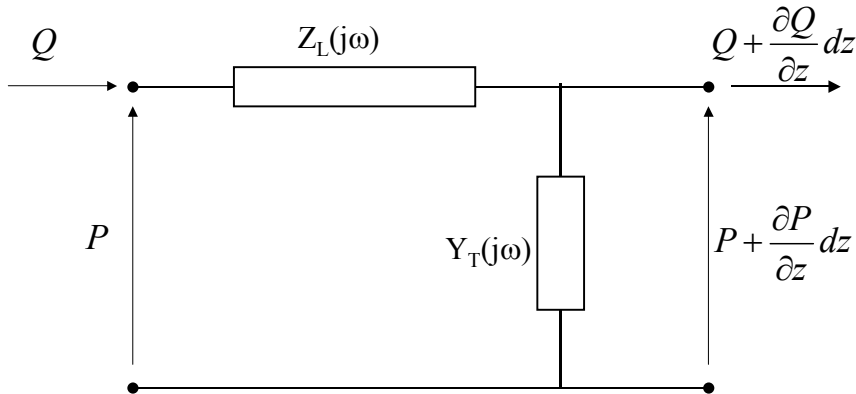
$Z_L(j\omega) = R + j\omega L$  impedenza longitudinale per unità di lunghezza

$Y_T(j\omega) = j\omega C$  ammettenza trasversale per unità di lunghezza

Integrando le equazioni della linea, i segnali di pressione e flusso nella generica sezione di coordinata  $z$  sono dati dalla sovrapposizione di due onde, una diretta ( $f$ ) ed una riflessa ( $r$ ):

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

### Regime periodico



$$\begin{cases} P = (Z_L dz)Q + P + \frac{\partial P}{\partial z} dz \\ Q = (Y_T dz) \left( P + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) + Q + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = -Z_L Q \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -Y_T P \end{cases}$$

da integrare con le opportune condizioni al contorno:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -Z_L \frac{\partial Q}{\partial z} = Z_L Y_T P$$

la cui soluzione è:

$$P(z) = P_{f_0} e^{-\gamma z} + P_{r_0} e^{\gamma z}$$

Infatti:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma P_{f_0} e^{-\gamma z} + \gamma P_{r_0} e^{\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \gamma^2 P_{f_0} e^{-\gamma z} + \gamma^2 P_{r_0} e^{\gamma z} = \gamma^2 P \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = Z_L Y_T$$

Costante di propagazione  $\gamma = \sqrt{Z_L Y_T} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$

Nel caso di linea senza perdite  $\gamma = \sqrt{j\omega L \cdot j\omega C} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta(\omega)$

Ma:

$$-Z_L Q = \frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma P_{f_0} e^{-\gamma z} + \gamma P_{r_0} e^{\gamma z}$$

da cui:

$$Q = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\gamma}{Z_L} P_{f_0} e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{Z_L} P_{r_0} e^{\gamma z}$$

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

Impedenza caratteristica della linea 
$$\frac{Z_L}{\gamma} = \frac{Z_L}{\sqrt{Z_L Y_T}} = \sqrt{\frac{Z_L}{Y_T}} = Z_0$$

Nel caso di linea a basse perdite 
$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{reale.}$$

Quindi:

$$\begin{cases} P(z) = P_{f_0} e^{-\gamma z} + P_{r_0} e^{\gamma z} = P_f + P_r \\ Q(z) = \frac{P_{f_0}}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{P_{r_0}}{Z_0} e^{\gamma z} = Q_f + Q_r = \frac{P_f - P_r}{Z_0} \end{cases}$$

Con condizioni al contorno:

$$\begin{cases} P(0) = P_{f_0} + P_{r_0} \\ Q(0) = \frac{P_{f_0} - P_{r_0}}{Z_0} \end{cases}$$

Per linea a basse perdite:

$$P(j\omega, z) = P_{f_0} e^{-j\omega\sqrt{LC}z} + P_{r_0} e^{j\omega\sqrt{LC}z}$$

Da cui:

$$P(t, z) = P_{f_0} \cos(\omega t - \omega\sqrt{LC}z + \delta) + P_{r_0} \cos(\omega t + \omega\sqrt{LC}z + \psi)$$

le sezioni equifase sono date da:

$$\omega t - \omega\sqrt{LC}z + \delta = cost \qquad \omega t + \omega\sqrt{LC}z + \psi = cost$$

Derivando rispetto al tempo:

**Onda diretta**

$$\omega - \omega\sqrt{LC} \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

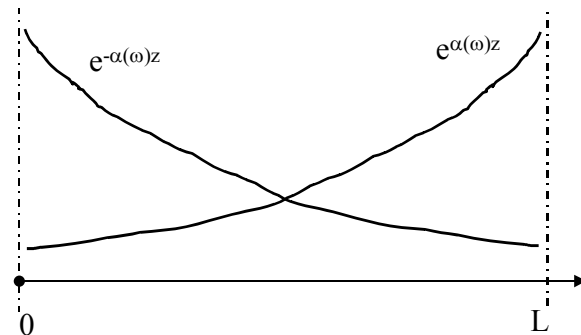
**Onda riflessa**

$$\omega + \omega\sqrt{LC} \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Velocità di fase  $v_f = \frac{\omega}{\beta(\omega)} \Rightarrow$  lunghezza d'onda  $\lambda = v_f T = \frac{v_f}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta(\omega)}$

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



Nel caso di linea a basse perdite la velocità di fase è data quindi da:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{Eh}{\rho 2a}}$$

che rappresenta la formula di Moens-Korteweg.

Tale formula fornisce valori ragionevolmente corretti della velocità di fase per valori alti della frequenza (dove cioè la linea può essere considerata a basse perdite). Nella tabella sono indicate le proprietà geometrico-fisiche nonché la velocità di fase e la lunghezza d'onda calcolate per alcune arterie.

	$E(Nm^{-2} \times 10^5)$	$h/2a$	$v_f(cm s^{-1})$	$\lambda (m)$
<b>Aorta Ascendente</b>	3-6	0.07	580	1.16
<b>Arteria femorale</b>	10	0.07	840	1.68

È evidente che la velocità di propagazione aumenta andando verso la periferia, dove E ed h/2a assumono valori più elevati.

Un'arteria o un intero distretto circolatorio è rappresentabile come cascata e diramazione di segmenti uniformi. Anche una eventuale conicità o variazione delle proprietà elastiche è rappresentabile ponendo in cascata N segmenti uniformi con diverse proprietà.

Da questo punto di vista, uno strumento operativo molto comodo è quello matriciale. Dato un segmento uniforme di lunghezza l, impedenza caratteristica  $Z_0$  e costante di propagazione  $\gamma$ , esso può essere rappresentato mediante un quadripolo lineare.



Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

Le grandezze emodinamiche alle porte sono legate dalla matrice catena:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = M_{1,2} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ Y_0 \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

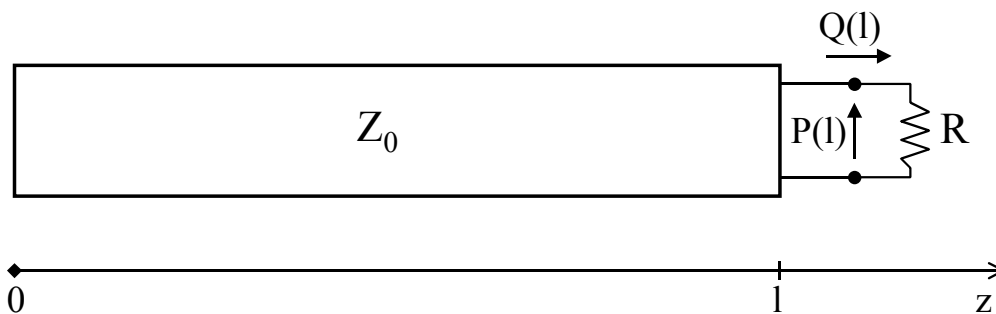
Il comportamento di una cascata di N segmenti è rappresentabile quindi mediante la matrice catena complessiva:

$$M = \prod_{k=1}^N M_{k,k+1}$$

A partire da M sono facilmente calcolabili le funzioni di trasferimento, tra le pressioni o le portate e le impedenze d'ingresso o di uscita del segmento di arteria.

Nella simulazione di una rete fluidica con diramazioni si parte dalla periferia, dove le resistenze periferiche sono rappresentate con resistenze concentrate. Si procede poi a ritroso fino ad incontrare una diramazione. I flussi in corrispondenza della diramazione si ripartiscono in ragione delle impedenze di ingresso ai vari rami. È così possibile calcolare pressione e flusso in regime periodico stazionario nell'intera rete circolatoria o ricavare informazioni globali sul sistema, per esempio attraverso l'impedenza d'ingresso dell'albero arterioso periferico.

### Riflessione in una linea di trasmissione uniforme



Il coefficiente di riflessione è definito come il rapporto tra l'onda riflessa e l'onda diretta:

$$\Gamma(z) = \frac{P_r}{P_f} = \frac{P_{r0}}{P_{f0}} e^{2\gamma z}$$

Al carico ( $z = l$ ):

$$\Gamma(l) = \frac{P_r}{P_f} = \frac{P_{r0}}{P_{f0}} e^{2\gamma l} \Rightarrow \frac{P_{r0}}{P_{f0}} = \Gamma(l) e^{-2\gamma l}$$

Da cui:

$$\Gamma(z) = \Gamma(l) e^{2\gamma(z-l)}$$

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

Sfruttando le condizioni di carico:

$$R = \frac{P(l)}{Q(l)} = Z_0 \frac{P_{f0}e^{-\gamma l} + P_{r0}e^{\gamma l}}{P_{f0}e^{-\gamma l} - P_{r0}e^{\gamma l}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)}$$

$$\Gamma(l) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}$$

Prima ipotesi:

$$\gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = j\frac{2\pi}{\lambda}$$

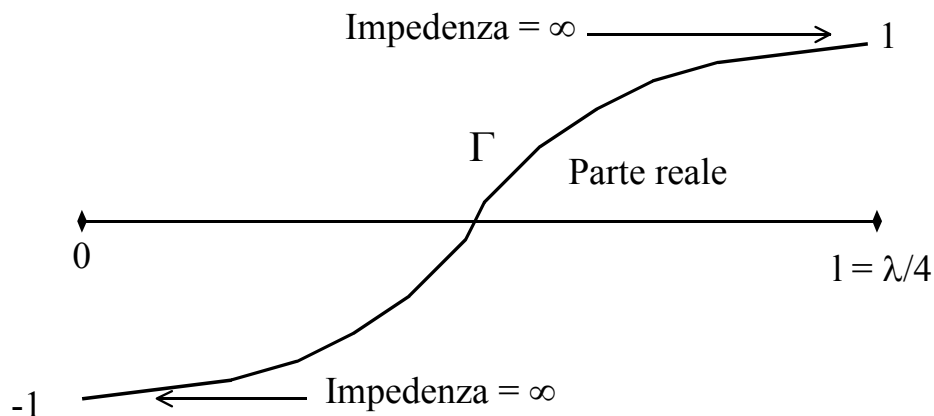
$$\Gamma(0) = \Gamma(l)e^{-2\gamma l} = \Gamma(l)e^{-2j\beta l} = \Gamma(l)e^{-j\frac{4\pi l}{\lambda}}$$

Seconda ipotesi:

Tubo chiuso  $\Rightarrow R = \infty$

$$\Gamma(l) = 1, P_r = P_f, Q_r = -Q_f \Rightarrow \Gamma(0) = e^{-j\frac{4\pi l}{\lambda}}$$

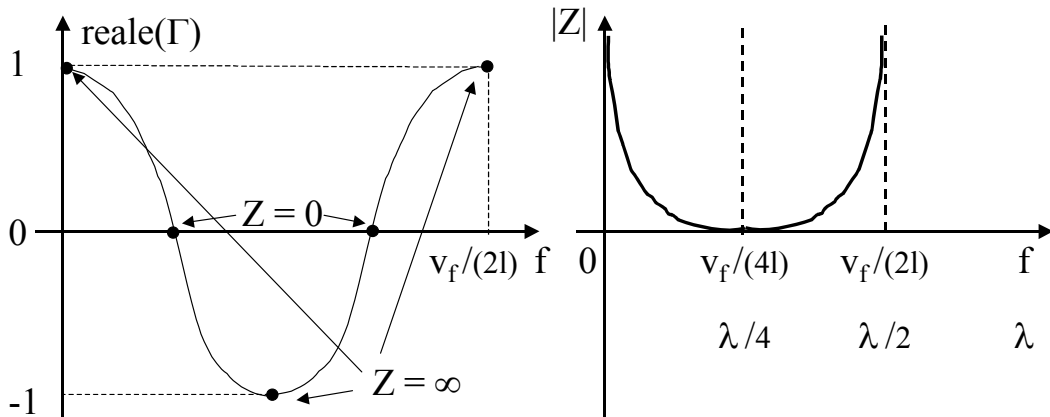
Trasformazione di impedenza:



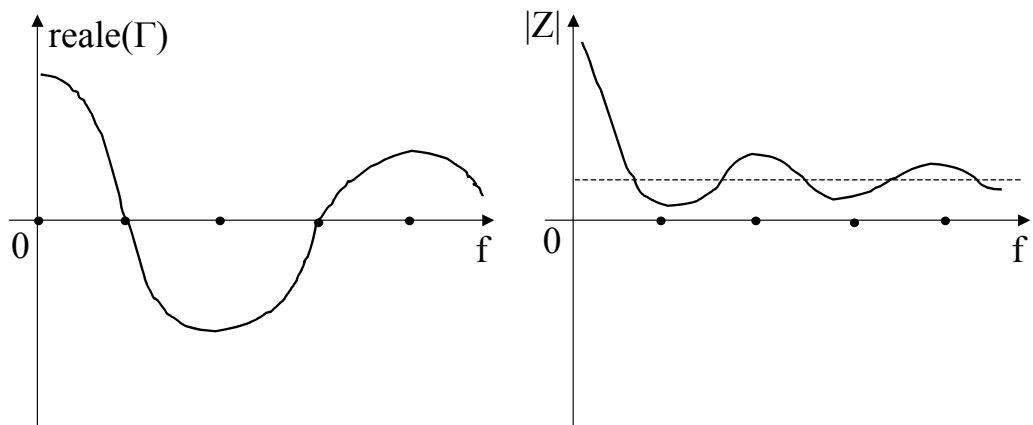
Nel dominio delle frequenze:

$$\Gamma(0) = e^{-j\frac{4\pi l}{\lambda}} = e^{-j\frac{4\pi f}{v_f}l}$$

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



Con attenuazione:



Quando  $Z = Z_0$ , ossia la linea di trasmissione è caricata dalla sua impedenza caratteristica o quando la linea ha lunghezza infinita:

$$\Gamma(l) = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = 0$$

non ci sono onde riflesse.

Le onde riflesse sono generate da:

- Terminazioni non adattate
- Biforcazioni
- Stenosi
- Proprietà fisiche e geometriche che variano con continuità (conicizzazione, incremento della rigidità)

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

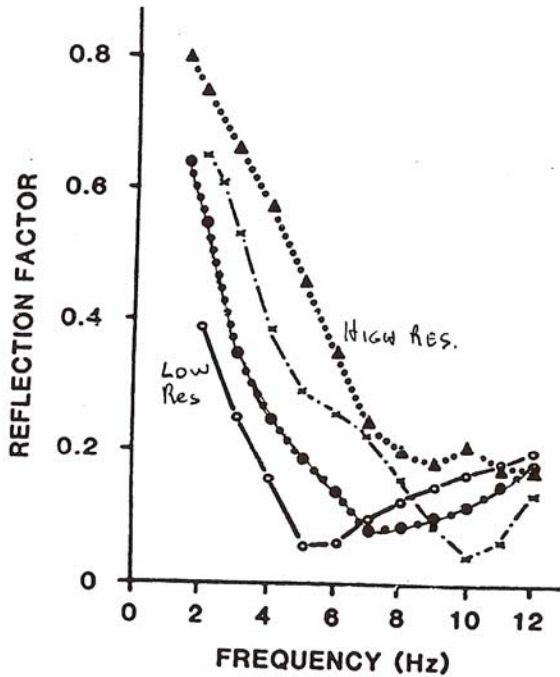


Fig. 9.7 Moduli of the reflection factor (ordinate) plotted as a function of frequency in the dog ascending aorta during several interventions that alter arterial impedance and wave reflections. Control (closed circles), low resistance (open circles), high resistance (crosses), and aortic occlusion (closed triangles) are shown. Note that the spectrum minimum shifts to lower frequencies with vasodilation and to higher frequencies with vasoconstriction and aortic occlusion. Reproduced from Westerhof et al. (1972).

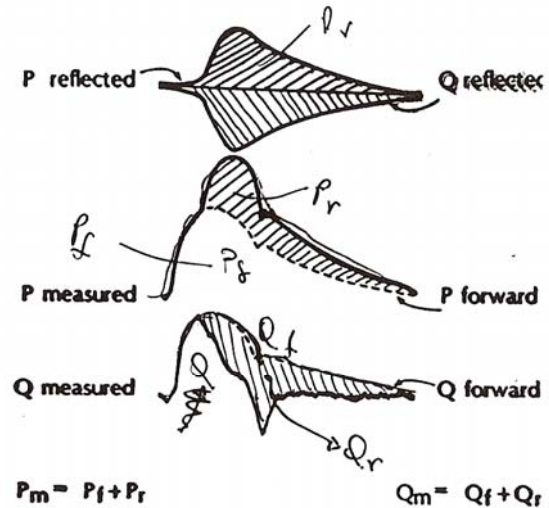


Fig. 9.10 The influence of pulse wave reflections on ascending aortic pressure (P) and flow (Q) waveforms. Incident or forward (f) and backward or reflected (r) pressure and flow waves are summed to yield measured (m) pressure and flow waveforms. The forward pressure and flow waves are identical, and so are the reflected waves except that the reflected flow wave is inverted with respect to the reflected pressure wave. Reproduced from Nichols et al. (1987).

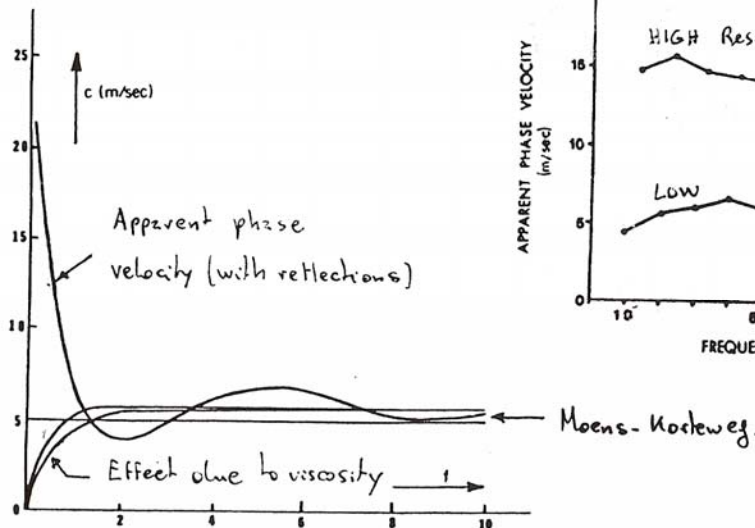
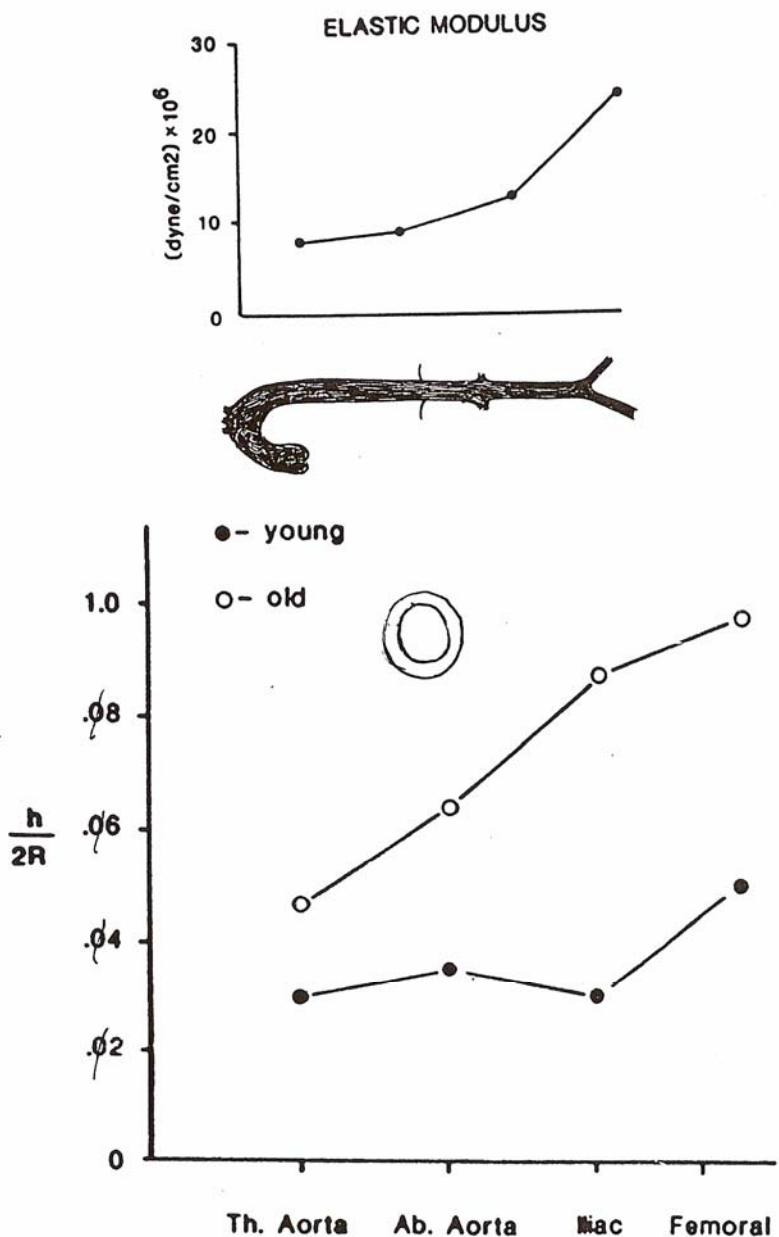


Fig. 4-8. Phase velocity in an infinitely long vessel as a function of frequency  $f (= \omega / 2\pi)$  for the Moens-Korteweg approximation (Graph 1, Eq. 4-50a); and for a more general theory, allowing for the viscous properties of blood (Graph 2, Eq. 4-52; Graph 3, Eq. 4-57). Graph 4 represents the experimentally obtained wave velocity in man.



Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.



**Fig. 4.6** Change in relative wall thickness ( $h =$  wall thickness;  $R =$  vessel radius) measurements in the thoracic aorta, abdominal aorta, iliac artery, and femoral artery of 'young' (11–20 years) and 'old' (36–52 years) subjects. Measurements were made at a distending pressure of 100 mmHg. Reproduced from Learoyd and Taylor (1966).

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

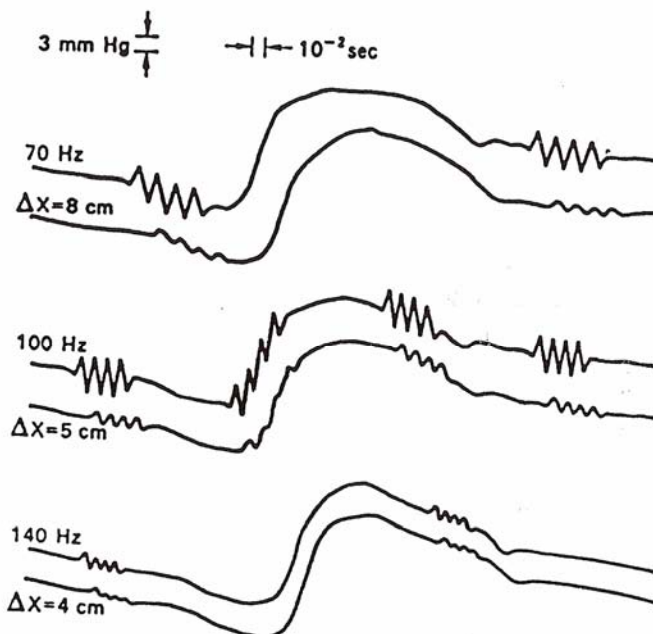


Fig. 4.20 An illustration of the technique used by Anliker and his colleagues to measure the velocity of radial waves. An external vibrator imposed short trains of high frequency waves on the intact vessel and the resultant pressure was recorded at two points a known distance apart. The velocity of travel can thus be calculated from the transmission time. From the downstream recording it can be seen how rapidly these waves are attenuated so that there is no possibility of reflected waves being created and interacting with the centrifugal wave. The frequencies used are far higher than those that can be detected in the natural waves, but as it was also shown that the velocity of pressure waves is virtually independent of frequency, they may be taken as a measure of the velocity of the normal pulse-wave. Reproduced from Anliker (1968).

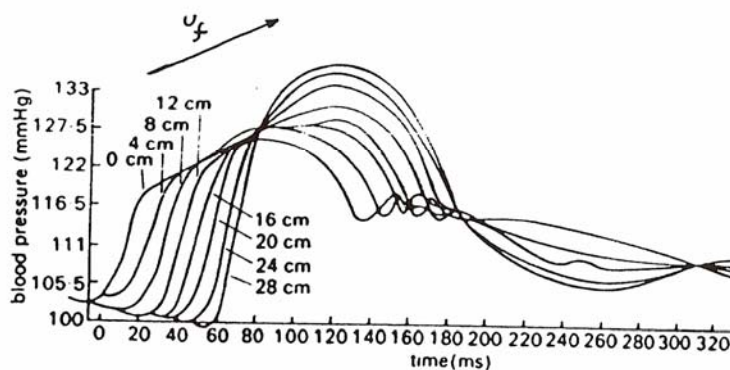


Figure 3.13:2 Simultaneous blood pressure records made at a series of sites along the aorta in the dog, with distance measured from the beginning of the descending aorta. From Olson, R. M., (1968) Aortic blood pressure and velocity as a function of time and position. *J. Appl. Physiol.* 24: 563-569. Reproduced by permission.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

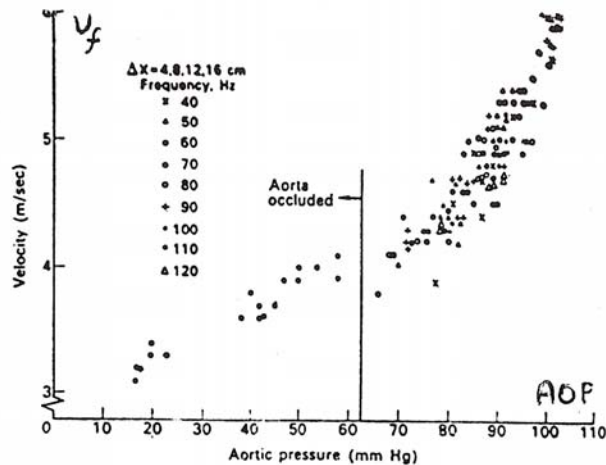


Fig. 4.21 The velocity of small imposed transient waves at different transmural pressures. The lowest pressures are recorded during partial aortic occlusion proximal to the site of measurement; to the right of the vertical line the velocities are taken to be those of the pressures during diastole and systole. As pressure increases the arterial wall becomes stiffer and pulse wave velocity increases. The increase in wave velocity is more pronounced above pressures of about 75 mmHg. Reproduced from Anliker et al. (1968)

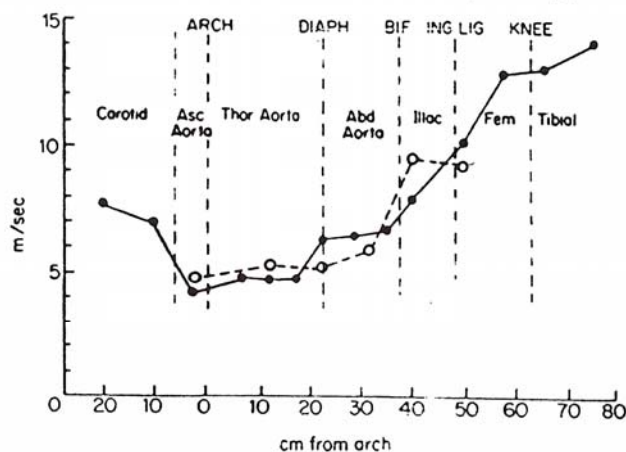


Fig. 4.16 A diagram to show the progressive increase in wavefront velocity of the pulse wave with increasing distance from the heart in the dog. The mean pressure was 130–160 cm H<sub>2</sub>O for all readings. It will be seen that in the ascending aorta the wave velocity is 4 m/s, rises slightly to about 4.7 m/s in the thoracic aorta and finally attains 13–15 m/s in the femoral and tibial arteries. The rise towards the head is also marked but is ultimately less elevated because the distances are shorter. Reproduced from Nichols and McDonald (1972). Pulse wave velocities recorded by Latham et al. (1987) in humans are indicated by the broken line.

## Concentrazione dei parametri

Viene ora da chiedersi. Data una arteria, supposta uniforme, di lunghezza  $l$ , quanti segmenti in cascata sono necessari per approssimare in modo adeguato le relazioni pressione-flusso alle porte del quadripolo?

Rita Stagni, a.a. 2005-2006

Corso Biomeccanica BS, Laurea Specialistica in Ingegneria Biomedica, Università di Bologna, Sede di Cesena

N.B.: ESSENDO IL MATERIALE ANCORA IN FASE DI REVISIONE POTREBBERO ESSERE PRESENTI REFUSI. IN TAL CASO SI RINGRAZIA PER EVENTUALI NOTIFICHE COMUNICATE A RITA.STAGNI2@UNIBO.IT.

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

È un classico problema di riduzione della complessità di un modello dove la complessità è questa volta legata al numero delle variabili di stato (pari al numero di elementi elastici ed inerziali).

Il modello originario ha una distribuzione spaziale continua di elementi elastici ed inerziali ed è quindi di ordine infinito, come dimostra tra l'altro la presenza di funzioni trascendenti nella matrice M. Invece, il numero di parametri che caratterizza il modello è pari a 3, Rl, Ll, Cl, pari cioè al numero di parametri della singola cella.

In generale, la risposta a tale domanda dipende da:

- i) campo di frequenza d'interesse;
- ii) tipo di risposta o relazione da approssimare (pressione, flusso, impedenza, funzione di trasferimento);
- iii) condizioni di carico.

Consideriamo, quale esempio significativo, quello dell'approssimazione dell'impedenza d'ingresso dell'albero arterioso periferico che sintetizza l'effetto di carico opposto dalla circolazione all'eiezione ventricolare.

Supponiamo di poter rappresentare l'aorta come un tubo cilindrico ad asse rettilineo, caricato distalmente con un modello windkessel i cui parametri rappresentano la resistenza periferica e la compliance distale.

1. Il grado di approssimazione dipende dalla natura del carico
2. In generale, la lunghezza del singolo blocco dovrebbe essere scelta molto minore della lunghezza d'onda alla massima frequenza di interesse
3. La discretizzazione non porta in questo caso ad un minor numero di parametri (anzi, al contrario) ma solo ad una riduzione dell'ordine del modello

### **Riduzione di complessità**

Esistono varie tecniche per la riduzione della complessità di un modello. In questo caso, per esempio, è possibile approssimare le funzioni trascendenti a bassa frequenza mediante uno sviluppo in serie di Taylor.

Oppure, è possibile affrontare il problema con metodi di identificazione black-box in cui si cerca la struttura del modello a parametri concentrati che meglio realizza il compromesso tra complessità (numero di parametri) e descrizione del sistema.

Nei casi reali non abbiamo una linea di trasmissione uniforme come nell'esempio trattato bensì una struttura ad albero con varie cause di complessità geometrica e fisica e quindi con un numero di

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

parametri enorme.

In questo caso le tecniche di riduzione fanno in genere riferimento ad uno schema concettuale in cui vengono associati i parametri concentrati ai distretti circolatori in modo da facilitarne poi l'interpretazione. In generale, i valori dei parametri devono però essere adattati sulla base delle misure disponibili per compensare gli inevitabili errori di modello.

Il modello deve evidentemente possedere i gradi di libertà per potersi adattare alle misure in varie condizioni fisio-patologiche.

Le risposte del modello devono essere poi sufficientemente sensibili ai parametri incogniti in modo da poter stimare questi ultimi a partire dalle misure disponibili.

### **Validazione del modello**

Il livello di discretizzazione deve costituire un compromesso tra l'esigenza di rappresentare correttamente la realtà (il che farebbe aumentare la complessità) e quella di poter stimare in modo accurato i parametri (minore complessità, maggiore sensibilità alle variazioni dei parametri). A volte il livello di compromesso si colloca su ordini piuttosto bassi rispetto alla complessità del sistema da descrivere.

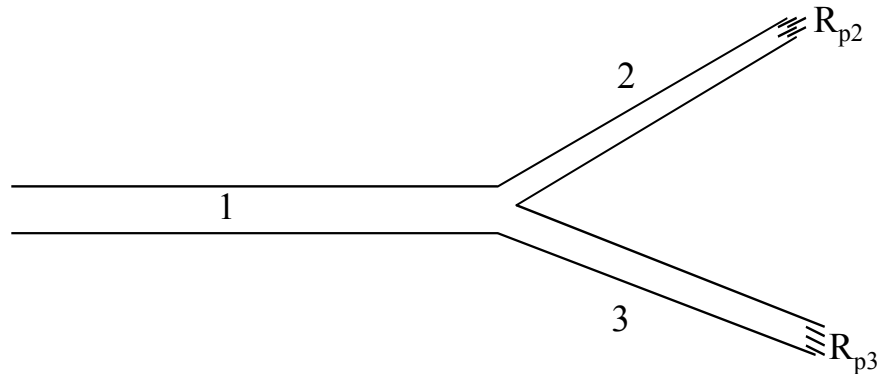
Un modello di ordine ridotto può essere validato sulla base delle risposte sperimentali o provenienti da un modello più complesso che ha già dimostrato di rappresentare correttamente la realtà in un insieme significativo di situazioni fisio-patologiche.

La validità del modello si basa sulla:

1. Capacità di descrivere, entro margini di errori prefissati e dipendenti dagli obiettivi del modello, le risposte (nel dominio del tempo o delle frequenze) del sistema
2. Possibilità di assegnare un significato fisico ai parametri che vi compaiono .
3. Variazioni parametriche coerenti con quelle attese sulla base delle perturbazioni introdotte (somministrazione di un farmaco, perturbazione meccanica o elettrica).

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

## Esercizio



Dato il distretto circolatorio in figura riceverne l'analogo RLC per un'analisi a bassa frequenza (lunghezza d'onda molto maggiore della lunghezza di ciascun tronco). Partire a tale scopo dai seguenti parametri:

viscosità del sangue	$\mu = 0.03$	[poise]
densità del sangue	$\rho = 1$	[g/cm <sup>3</sup> ]
raggio	$r_1 = 5 \quad r_2 = 4 \quad r_3 = 3.5$	[mm]
lunghezza	$l_1 = 50 \quad l_2 = 70 \quad l_3 = 50$	[cm]
velocità di fase	$v_1 = 4 \quad v_2 = 5 \quad v_3 = 6$	[m/s]
resistenze periferiche	$R_{p2} = 5 \times 10^3 \quad R_{p3} = 4 \times 10^3$	[g/(cm <sup>4</sup> s)]

1. verificare la validità dell'ipotesi sulla lunghezza d'onda per ciascuno dei tre vasi. Assumere a tale scopo una frequenza corrispondente a 75 battiti/minuto.
2. calcolare i parametri R, L e C di ciascun vaso, rappresentato come un'unica cella.
3. Rappresentare l'analogo complessivo in presenza delle resistenze periferiche  $R_{p2}$ ,  $R_{p3}$  distrettuali.
4. Calcolare la resistenza periferica totale all'ingresso.
5. Stimare la compliance totale del distretto.

$$1. \text{ HR} = 75 \text{ battiti/min} \quad f = 75/60 = 1.25\text{Hz}$$

$$\lambda = vT = v/f$$

$$\lambda_1 = 3.2\text{m} \gg l_1 \quad \lambda_2 = 4\text{m} \gg l_2 \quad \lambda_3 = 4.8\text{m} \gg l_3$$

$$2. \quad R = 8\mu l / (\pi r^4) \quad L = \rho l / (\pi r^2)$$

Il presente materiale didattico vuole fornire in maniera sintetica le nozioni fondamentali della Biomeccanica, prendendo spunto dalle pubblicazioni di Y.C.Fung ("Biomechanical Properties of Living Tissues", "Circulation", "Motion, Flow, Stress and Growth", "First course in Continuum Mechanics"), il padre della Biomeccanica moderna, Ai cui testi si rimanda per ogni approfondimento.

$$R_1 = 61.12 \text{ dine/s cm}^5 \quad L_1 = 63.66 \text{ dine/s cm}^5$$

$$R_2 = 208.9 \text{ dine/s cm}^5 \quad L_2 = 133.26 \text{ dine/s cm}^5$$

$$R_3 = 254.5 \text{ dine/s cm}^5 \quad L_3 = 129.9 \text{ dine/s cm}^5$$

$$v = \frac{l}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L} \left( \frac{l}{v} \right)^2$$

$$C_1 = 254.4 \times 10^{-6} \text{ cm}^5/\text{dine} \quad C_2 = 140.74 \times 10^{-6} \text{ cm}^5/\text{dine} \quad C_3 = 53.46 \times 10^{-6} \text{ cm}^5/\text{dine}$$

$$4. \quad R_T = R_1 + (R_2 + R_{p2}) \parallel (R_3 + R_{p3}) = 2403 \text{ dine/s cm}^5$$

$$5. \quad C_T = C_1 + C_2 + C_3 = 449 \times 10^{-6} \text{ cm}^5/\text{dine}$$