Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 1 Febbraio 2012

Problema 1

Al tempo $t = 0$ la funzione d'onda di una particella di massa m in una buca di potenziale di profondità infinita, centrata nell'origine e di larghezza $2a$, è

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{k}\psi_{2k}(x) \ , \qquad N \in \mathbb{N}_+ \ ,$$

con $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$ le autofunzioni normalizzate dell'hamiltoniana H. Determinare

1. la funzione d'onda normalizzata del sistema a $t \geq 0$;
2. il valor medio di x, x^3 e della parità a $t \geq 0$.
3. A $t = 0^+$ una misura ideale di I specie ha rilevato che la particella è nella regione $x \geq 0$. Determinare la funzione d'onda normalizzata a $t > 0$.
4. **Facoltativo.** Una successiva misura ideale di I specie, eseguita a $t = t_0$, ha rilevato che il minimo livello energetico possibile è E_{2N+1}, $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}_+} = \mathrm{Sp}(H)$. Determinare il valor medio della parità a $t \geq t_0$.

Problema 2

La dinamica di una particella di spin 1/2 è descritta dall'hamiltoniana

$$H = A\vec{L}^2 + BL_z \ ,$$

con A, B costanti e $\vec{L} \equiv (L_x, L_y, L_z)$ l'operatore momento angolare. La dipendenza della funzione d'onda dalle coordinate al tempo $t = 0$ è

$$\psi(x) = (x + y)e^{-|a|r^2} \ ,$$

con a costante e r il modulo del raggio vettore. Determinare

1. spettro di H;
2. i possibili risultati, con le relative probabilità, di una misura eseguita a $t = 0$ dell'osservabile associata a L_z;
3. il valor medio, a $t \geq 0$, di L_z e L_x.
4. Sia $\vec{S} \equiv (S_x, S_y, S_z)$ l'operatore di spin. A $t = 0^+$ una misura ideale di I specie rileva che $l_z = 1$ e $s_z = 1/2$. Determinare, a $t > 0$, il valor medio sia di $L_y + S_y$ che di $\vec{L} \cdot \vec{S}$.
5. **Facoltativo.** Calcolare, al tempo $t > 0$, il valor medio di $\vec{L} \cdot \vec{S}$ nello stato descritto al punto precedente, supponendo però che lo stato di spin sia

   $$|1/2\rangle + |-1/2\rangle \ ,$$

   con $S_z| \pm 1/2\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}| \pm 1/2\rangle$.

   Si ricorda che le armoniche sferiche per $l = 1$ sono

   $$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \ , \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \ , \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \ .$$

1. Si ha
$$\int_{-a}^{a} |\psi(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \ .$$
La funzione d'onda normalizzata al tempo $t \geq 0$ è
$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{N(N+1)}} \sum_{k=1}^{N} \sqrt{k} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{2k} t} \psi_{2k}(x) \ ,$$
dove
$$E_j = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} j^2 \ , \qquad j \in \mathbb{N}_+ \ .$$

2. $\langle x^{2n+1} \rangle_t = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$, perché integrale di funzione dispari su intervallo simmetrico. Sia P l'operatore di parità. Si ha $P\psi(x,t) = \psi(-x,t) = -\psi(x,t)$, quindi $\langle P \rangle_t = -1$.

3. A $t = 0^+$ la funzione d'onda normalizzata è 0 per $x < 0$, mentre per $x \geq 0$
$$\frac{2}{\sqrt{N(N+1)}} \sum_{k=1}^{N} \sqrt{k} \psi_{2k}(x) \ ,$$
dove si è usato il fatto che ψ ha parità definita, cosicché $|\psi|^2$ è pari, quindi $\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} |\psi(x)|^2 dx$. Per $t > 0$ la funzione d'onda normalizzata è
$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \psi_k(x) \ ,$$
dove
$$c_k = \frac{2}{\sqrt{N(N+1)}} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{j} \int_0^a \psi_k(x) \psi_{2j}(x) dx \ .$$

4. L'ortogonalità delle ψ_j e il fatto che se $f(-x) = f(x)$ allora $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, implicano
$$c_{2k} = \sqrt{\frac{k}{N(N+1)}} \ , \quad \text{per } k \in [1, N] \ ,$$
$$c_{2k} = 0 \ , \quad \text{per } k \geq N+1 \ .$$
Quindi, le uniche autofunzioni dispari di H che contribuiscono a $\psi(x,t)$ sono $\psi_2, \psi_4, \ldots, \psi_{2N}$, da cui segue che, dopo la seconda misura, si ha $\langle P \rangle_t = 1$ poiché la funzione d'onda è pari
$$\psi(x,t) = \sum_{k=N}^{\infty} c_{2k+1} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{2k+1} t} \psi_{2k+1}(x) \ .$$

1. $\mathrm{Sp}(H) = \{E_{l,m} | l \in \mathbb{N}, m \in [-l, l]\}$, $E_{l,m} = Al(l+1)\hbar^2 + Bm\hbar$.

2. Poiché
$$x + y = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi}{3}} r [Y_{1,-1} + iY_{1,1}] \ ,$$
segue che i possibili risultati di L_z sono $\pm\hbar$, ognuno con probabilità 1/2.

3. $[H, L_z] = 0$ implica $\langle L_z \rangle_t = \langle L_z \rangle_0 = \hbar/2 - \hbar/2 = 0$. Omettendo la parte dipendente da r si ha $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{1,-1}t}|-1\rangle + ie^{-\frac{i}{\hbar}E_{1,1}t}|1\rangle$, dove i ket sono autostati di L_z. Da $L_x|-1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle$, $L_x|1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle$, segue $\langle L_x \rangle_t = 0$.

4. Sia $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Dopo la misura la parte di momento angolare totale è l'autoket di L_z e S_z $|1, 1/2\rangle$. Essendo $|1, 1/2\rangle$ autoket di H, segue che qualsiasi valor medio è indipendente da t. Si ha $\langle J_i \rangle_t = 0$ per $i = x, y$. Osservando che $\vec{L} \cdot \vec{S}|1, 1/2\rangle = L_z S_z |1, 1/2\rangle + \ldots = \frac{\hbar^2}{2}|1, 1/2\rangle + \ldots$, dove i termini omessi sono ket ortogonali a $|1, 1/2\rangle$, si ha $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle_t = \frac{\hbar^2}{2}$. Un modo equivalente di calcolare $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle_t$ è osservare che poiché $m_j = m_l + m_s = 3/2$, si ha $j = 3/2$, cosicchè $|1, 1/2\rangle = |3/2, 3/2\rangle_j$. In tal modo, dalla relazione
$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \ ,$$
segue
$$\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle_t = \frac{\hbar^2}{2}\Big(\frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4}\Big) = \frac{\hbar^2}{2} \ .$$

5. Poiché anche in questo caso $|\psi(t)\rangle$ è autostato di H per qualsiasi t, si ha $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle_t = \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle_0$. Come nel caso precedente, il valor medio richiesto è indipendente da t. L'azione di $\vec{L} \cdot \vec{S}$ sullo stato dopo la misura, corrispondente a $|1, 1/2\rangle + |1, -1/2\rangle$ (il cui evoluto temporale differisce per una fase globale), è
$$\vec{L} \cdot \vec{S}(|1, 1/2\rangle + |1, -1/2\rangle) = \frac{\hbar^2}{2}(|1, 1/2\rangle - |1, -1/2\rangle) + \mathrm{stati\,con}\, m_l \neq 1 \ ,$$
da cui $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle_t = 0$. È istruttivo ricalcolare il valor medio richiesto utilizzando la rappresentazione J. Poiché
$$|3/2, 3/2\rangle_j = |1, 1/2\rangle \ ,$$
$$|1/2, 1/2\rangle_j = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 1/2\rangle \ ,$$
$$|3/2, 1/2\rangle_j = \sqrt{\frac{1}{3}}|1, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0, 1/2\rangle \ ,$$
si ha
$$\sqrt{\frac{1}{2}}(|1, 1/2\rangle + |1, -1/2\rangle) = \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, 1/2\rangle_j + \sqrt{\frac{1}{6}}|3/2, 1/2\rangle_j + \sqrt{\frac{1}{2}}|3/2, 3/2\rangle_j \ .$$
È chiaro che nel calcolo del valor medio gli elementi non diagonali sono nulli. D'altronde, ${}_j\langle 1/2, 1/2|\vec{L} \cdot \vec{S}|1/2, 1/2\rangle_j = -\hbar^2$ e, come già visto, ${}_j\langle 3/2, m_j|\vec{L} \cdot \vec{S}|3/2, m_j\rangle_j = \hbar^2/2$. Quindi $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle_t = 0$.