Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica

Padova - Dipartimento di Fisica - 07 Luglio 2008

Problema

Una particella quantistica di massa m e carica q è soggetta al potenziale $V(X) = \frac{m\omega^2}{2}X^2$. Si indichino con $a_x^\dagger$ e a_x gli operatori di creazione e distruzione (in rappresentazione x) e con $\phi_n(x)$ le autofunzioni dell'oscillatore armonico di energia E_n.

1. Si determinino esplicitamente (i.e. utilizzando a_x e $a_x^\dagger$) le autofunzioni $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ relative ai primi due autostati dell'oscillatore armonico.

Si supponga che all'istante $t = -\bar{t}$, ($\bar{t} > 0$) il sistema si trovi nello stato (non normalizzato) $\psi(x, -\bar{t}) = \phi_0(x) + \frac{1}{3}\phi_1(x)$. Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{P}$ rispettivamente l'operatore Hamiltoniano e l'operatore di paritá.

2. Si determinino $\langle\mathcal{H}\rangle_{\psi(t)}$ e $\langle\mathcal{P}\rangle_{\psi(t)}$ ad un generico istante di tempo $t > -\bar{t}$.

All'istante $t = 0$ si effettua una misura (di prima specie) di parità con risultato $\mathcal{P} = 1$ e immediatamente dopo si accende un campo elettrico $\mathcal{E}$ lungo la direzione x. Si indichi con $\widetilde{\psi}_+(x,t)$ e con $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - q\mathcal{E}x$ la funzione d'onda e la Hamiltoniana per $t > 0^+$:

3. Si ricavino le autofunzioni $\widetilde{\phi}_n(x)$ e gli autovalori $\widetilde{E}_n$ della Hamiltoniana $\widetilde{\mathcal{H}}$. A tale scopo é utile definire le due seguenti costanti: $x_0 = q\mathcal{E}/(m\omega^2)$ e $V_0 = q^2\mathcal{E}^2/(2m\omega^2)$;

4. Si calcoli la probabilitá che una misura di energia dia come risultato $\widetilde{E}_0$ ad un generico istante di tempo $t > 0$;

5. Si dimostri che vale la seguente relazione:

$$c_n \equiv \langle\widetilde{\phi}_n|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(-\frac{\beta x_0}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-\frac{\beta^2 x_0^2}{4}} \qquad \text{con} \qquad \beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

6. Si scriva l'evoluzione temporale dello stato $\widetilde{\psi}_+(x,t)$ e si calcoli $\langle\widetilde{\mathcal{H}}\rangle_{\psi_+(t)}$. (NB: Si ricordi che $\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\alpha^n}{n!} = \alpha e^\alpha$).