Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica

Padova - Dipartimento di Fisica - 09 Gennaio 2008

Problema

Una particella quantistica è descritta dall' Hamiltoniana $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} X^2$. Si definiscano i seguenti operatori hermitiano-coniugati a e $a^\dagger$:

$$\begin{cases} a & = & \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \\ a^\dagger & = & \frac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \text{dove } \hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \text{ e } \hat{P} = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}$$

Si indichi con $|n\rangle$ ($n \geq 0$) l'autostato di H corrispondente all'autovalore E_n.

1. Verificare per quali valori di n gli stati $a^\dagger|n\rangle$ e $a|n\rangle$ sono ancora autostati di H ed esprimerne gli autovalori corrispondenti in termini di E_n;
2. Sia p un numero intero positivo, ripetere l'analisi del punto precedente per gli stati $(a^\dagger)^p|n\rangle$ e $(a)^p|n\rangle$;
3. Per un generico stato $|n\rangle$ calcolare $\langle X\rangle_n$, $\langle P\rangle_n$, $\langle X^2\rangle_n$, $\langle P^2\rangle_n$ e verificare il principio di indeterminazione di Heisenberg (prestare attenzione al caso $n = 0$);

Si indichino con $a_x^\dagger$ e a_x gli operatori di creazione e distruzione in rappresentazione x e con $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ le autofunzioni dell'oscillatore armonico con autovalore E_n.

4. Si determinino esplicitamente (i.e. utilizzando a_x e $a_x^\dagger$) le autofunzioni $\phi_0(x)$ e $\phi_1(x)$ relative ai primi due autostati dell'oscillatore armonico;
5. Supponendo che all'istante $t = 0$ il sistema si trovi nello stato $\psi(x)$ rappresentato dalla funzione d'onda (non normalizzata) $\psi(x, 0) = \frac{4}{3}\phi_0(x) + \phi_1(x)$, determinare $\langle H\rangle_{\psi(t)}$ per un generico istante di tempo $t > 0$;
6. All'istante di tempo $t = \bar{t}$ si effettua una misura di parità (misura ideale di prima specie) che dà come risultato $\mathcal{P} = -1$. Determinare $\langle H\rangle_{\psi(t)}$, per un generico istante di tempo $t > \bar{t}$. Dire se la misura è stata esotermica ($E(t > \bar{t}) < E(t < \bar{t})$) o endotermica ($E(t > \bar{t}) > E(t < \bar{t})$).

FACOLTATIVO

9. Verificare il principio di indeterminazione ad un tempo $0 < t < \bar{t}$.