Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 16 Giugno 2008

Problema

Una particella quantistica di massa M è soggetta al seguente potenziale unidimensionale:

$$\begin{cases} V(x) = 0\,, & x < -\frac{L}{2} \\ V(x) = -V_0\,, & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ V(x) = 0\,, & x > \frac{L}{2} \quad . \end{cases}$$

con L e V_0 due numeri reali positivi.

1. Discutere qualitativamente lo spettro dell'operatore Hamiltoniano $H = \frac{P^2}{2M} + V(X)$ e descriverne le generiche autofunzioni (fisicamente accettabili) nei casi $E > 0$ ed $E < 0$;

Un caso particolarmente interessante della buca di potenziale descritta in precedenza si ha ponendo $L = \frac{\alpha}{V_0}$ (con α un numero reale positivo). Facendo tendere $V_0 \to \infty$ si ottiene una buca di potenziale deltiforme. Si consideri, quindi, nel seguito, l'operatore Hamiltoniano $H = \frac{P^2}{2M} - \alpha\delta(x)$ e si dimostri che esiste un solo stato legato $\phi_0(x)$. Ovvero

2. Si determini la funziona d'onda (normalizzata) di tale stato legato;

3. Si determini l'energia di tale stato legato.

Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia descritto dallo stato $\psi(x, 0) = \phi_0(x)$.

4. Si determini la probabilitá che una misura di paritá per $t > 0$ dia come risultato $\mathcal{P} = -1$;

5. Si calcolino le fluttuazioni $(\Delta X)_{\psi(t)}$ e $(\Delta P)_{\psi(t)}$ e si verifichi il principio di indeterminazione di Heisenberg (FACOLTATIVO).

Al tempo $t = 0$ viene rimossa, istantaneamente, la buca di potenziale.

6. Calcolare la densitá di probabilitá che lo stato abbia momento p al tempo $t = 0^+$;

7. Si determini $\psi(x, t_1)$ ad un generico istante di tempo $t_1 > 0$.

NOTA: Il punto 5 è facoltativo.