I Prova scritta di Istituzioni di Meccanica Quantistica
Padova - Dipartimento di Fisica - 20 Gennaio 2012

Si consideri un sistema quantistico composto da una particella di massa m. L'operatore hamiltoniano del sistema è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x-a)^2 \ ,$$

dove a e ω sono costanti. Determinare

1. autovalori ed autovettori di H;
2. una simmetria discreta non banale di H rappresentata da un operatore autoaggiunto ed unitario $\mathcal{O}_a$;
3. il valor medio, al tempo $t \geq 0$, dell'operatore momento e del suo quadrato, sapendo che a $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dalla funzione d'onda

   $$\psi = \psi_0 + i\psi_1 + \psi_3 \ ,$$

   con $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le autofunzioni normalizzate di H.
4. Si supponga ora che al tempo $t = 0^+$ sia stata invece eseguita una misura, ideale di prima specie, da cui sia risultato che la particella si trova nella regione $x \geq a$. Si determini, al tempo $t > 0$, il valor medio dell'osservabile $x - a$.
5. **Facoltativo.** Si mostri un possibile modo naturale di esprimere $\mathcal{O}_a$ come prodotto di due operatori, ciascuno non banale. Si mostri l'autoaggiuntezza di $\mathcal{O}_a$ utilizzando le proprietà di tali operatori.

N.B. Nella quarta domanda non è richiesto il calcolo esplicito degli integrali coinvolti.

Si ricorda che

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^+ - a) \ .$$

1. L'hamiltoniana proposta è quella relativa all'oscillatore armonico il cui potenziale ha lo zero in $x = a$. Le autofunzioni di H sono quindi

$$\psi_n(x) = \phi_n(x - a) \ ,$$

$n \in \mathbb{N}$, dove $\{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è l'insieme di autofunzioni dell'operatore hamiltoniano H_0 relativo all'oscillatore armonico con potenziale centrato in $x = 0$. Si ha

$$H_0 = T_a H T_a^{-1} \ ,$$

dove

$$T_l := e^{\frac{i}{\hbar} lp} \ , \qquad \forall l \in \mathbb{R} \ ,$$

è l'operatore che trasla x di l. Gli autovalori di H sono $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$.

2. La simmetria discreta da identificare corrisponde all'operatore

$$\mathcal{O}_a f(x) = f(2a - x) \ ,$$

dove $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. È immediato verificare che tale trasformazione lascia invariato l'hamiltoniano

$$\mathcal{O}_a H \mathcal{O}_a^{-1} = H \ .$$

Si osservi che $\mathcal{O}_a$ mappa $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso. Questa è una condizione necessaria affinché $\mathcal{O}_a$ sia autoaggiunto. È altrettanto immediato verificare che $\mathcal{O}_a$ è simmetrico

$$(g, \mathcal{O}_a f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x) f(2a - x) dx = \int_{\infty}^{-\infty} \bar{g}(2a - y) f(y) d(-y) = (\mathcal{O}_a g, f) \ ,$$

$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Dalle relazioni

$$\mathcal{O}_a^+ \mathcal{O}_a = \mathcal{O}_a \mathcal{O}_a = I \ , \qquad \mathcal{O}_a \mathcal{O}_a^+ = \mathcal{O}_a \mathcal{O}_a = I \ ,$$

segue l'unitarietà $\mathcal{O}_a^+ = \mathcal{O}_a^{-1}$. Per quanto concerne la domanda facoltativa si noti che

$$\mathcal{O}_a = P T_{2a} = T_{-2a} P \ ,$$

dove P è l'operatore parità. Infatti,

$$P T_{2a} f(x) = P f(x + 2a) = f(-x + 2a) \ ,$$

e

$$T_{-2a} P f(x) = T_{-2a} f(-x) = f(-x + 2a) \ .$$

In proposito si noti che un errore piuttosto comune è porre $Pf(x + 2a) = f(-x - 2a)$. Per capire l'errore è sufficiente ricordare che gli operatori agiscono sulla variabile indipendente. Ancor più esplicitamente, si ponga $g(x) = f(x - 2a)$ cosicché $Pg(x) = g(-x) = f(-x + 2a)$. Si osservi anche che

$$P^+ = P \ ,$$

e

$$T_l^+ = T_{-l} = T_l^{-1} \ .$$

È utile mostrare l'autoaggiuntezza utilizzando questa forma fattorizzata

$$(P T_l)^+ = T_l^+ P^+ = T_{-l} P = P T_l \ .$$

Si noti infine che $\mathcal{O}_l = P T_l = P T_{l/2} T_{l/2} = T_{l/2}^{-1} P T_{l/2}$.

3. Per quanto concerne i valori medi delle potenze dell'operatore momento, si osservi che

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-a)\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(x-a)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\frac{\partial^k}{\partial x^k}f(x)dx \ .$$

Ne segue che tali valor medi corrispondono a quelli che si avrebbero se l'hamiltoniana fosse relativa all'oscillatore armonico con potenziale centrato nell'origine. Equivalentemente, si osservi che denotando con $|\bar{n}\rangle$ gli autostati di H e con $|n\rangle$ quelli di H_0, si ha

$$|\bar{n}\rangle = T_{-a}|n\rangle \ .$$

Quindi, poiché $[T_l, p] = 0$, $\forall l \in \mathbb{R}$, si ha

$$\langle\bar{m}|e^{\frac{i}{\hbar}Ht}p^k e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\bar{n}\rangle = e^{i(m-n)\omega t}\langle\bar{m}|p^k|\bar{n}\rangle = e^{i(m-n)\omega t}\langle m|p^k|n\rangle \ .$$

Ne segue che al fine del calcolo dei valori medi di p e p^2, possiamo considerare come stato evoluto al tempo $t \geq 0$ lo stato (normalizzato)

$$|\psi\rangle_t = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\omega t}}{\sqrt{3}}\big(|0\rangle + ie^{-i\omega t}|1\rangle + e^{-3i\omega t}|3\rangle\big) \ .$$

Si ha quindi

$$\langle p\rangle_t = \frac{i}{3}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\big(\langle 0|-ie^{i\omega t}\langle 1|+e^{3i\omega t}\langle 3|\big)(a^+-a)\big(|0\rangle+ie^{-i\omega t}|1\rangle+e^{-3i\omega t}|3\rangle\big)$$

a cui contribuiscono solamente i termini contenenti $\langle 0|a|1\rangle$ e $\langle 1|a^+|0\rangle$. Si ha

$$\langle p\rangle_t = \frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{3}\cos(\omega t) \ .$$

I termini che contribuiscono a

$$\langle p^2\rangle_t = -\frac{m\omega\hbar}{6}\big(\langle 0|-ie^{i\omega t}\langle 1|+e^{3i\omega t}\langle 3|\big)(a^+-a)^2\big(|0\rangle+ie^{-i\omega t}|1\rangle+e^{-3i\omega t}|3\rangle\big) \ ,$$

sono quelli contenenti i seguenti coefficienti

$$\langle k|aa^+|k\rangle = k+1 \ , \qquad k=0,1,3 \ , \qquad \langle k|a^+a|k\rangle = k \ , \qquad k=1,3 \ ,$$

e

$$\langle 1|a^2|3\rangle = \langle 3|a^{+2}|1\rangle = \sqrt{6} \ .$$

Risulta quindi

$$\langle p^2\rangle_t = m\omega\hbar\Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(2\omega t) + \frac{11}{6}\Big) \ .$$

4. Al tempo $t = 0^+$ la funzione d'onda è 0 per $x < a$ e

$$\psi(x) = A(\phi_0(x-a) + i\phi_1(x-a) + \phi_3(x-a)) \ ,$$

per $x \geq a$, dove

$$A^{-2} := \int_0^\infty |\phi_0(y) + i\phi_1(y) + \phi_3(y)|^2 dy =$$

$$\int_0^\infty (\phi_0^2(y) + \phi_1^2(y) + \phi_3(y)^2 + 2\phi_0(y)\phi_3(y))dy = \frac{3}{2} + \int_0^\infty 2\phi_0(y)\phi_3(y)dy \ .$$

Si noti che nel primo passaggio è stato usato il fatto che le ϕ_n sono reali. Si noti anche che la presenza del termine $2\phi_0(y)\phi_3(y)$, il cui integrale è nullo su intervalli simmetrici rispetto l'origine, implica

$$\int_0^\infty |\phi_0(y) + i\phi_1(y) + \phi_3(y)|^2 dy \neq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty |\phi_0(y) + i\phi_1(y) + \phi_3(y)|^2 dy \ ,$$

che spiega la disattenzione, peraltro relativamente frequente, di identificare $\int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx$ con $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty |\psi(x)|^2 dx$ (il modulo quadro di una funzione non è necessariamente una funzione pari).

Lo sviluppo della funzione d'onda a $t = 0^+$ nella base $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n \phi_n(x-a) \ ,$$

con

$$c_n = A\int_0^\infty \phi_n(y)(\phi_0(y) + i\phi_1(y) + \phi_3(y))dy \ .$$

In proposito si osservi che, data la presenza del fattore i, c_n non è generalmente reale. Inoltre, la proprietà $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$ ed il fatto che l'integrale di una funzione pari su $\mathbb{R}$ vale due volte l'integrale dell'integrale su $\mathbb{R}^+$, implicano che se le condizioni $m \neq n$ e $m+n$ pari, sono entrambe soddisfatte, allora $\int_0^\infty \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0$.

Al tempo $t > 0$ la funzione d'onda è

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^\infty c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\phi_n(x-a) \ ,$$

da cui segue

$$\langle x - a\rangle_t = \int_{\mathbb{R}} \sum_{m,n=0}^\infty \bar{c}_m c_n y e^{i(m-n)\omega t}\phi_m(y)\phi_n(y)dy \ .$$

Quest'ultimo integrale, il cui valore non era peraltro richiesto, è facilmente calcolabile. Infatti

$$\langle m|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle m|a + a^+|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{m}\delta_{m,n+1} + \sqrt{m+1}\delta_{m,n-1}) \ ,$$

da cui segue

$$\langle x - a\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\sum_{n=1}^\infty \sqrt{n}\,\Re\Big(\bar{c}_n c_{n-1} e^{i\omega t}\Big) \ .$$