Istituzioni di Fisica Teorica-Meccanica Quantistica

(13/1/2020)

Lo stato di un oscillatore armonico quantistico unidimensionale di massa m e frequenza angolare ω a $t = 0$ é descritto dal ket

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle + 2\ i\ |2\rangle,$$

ove $|n\rangle$ denota l'autovettore normalizzato della Hamiltoniana, H, del sistema di autovalore $\mathcal{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2), n \in \mathbf{N}$.

Si determinino:

1) la probabilitá che una misura dell'energia a $t \geq 0$ dia un risultato compreso tra $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_4$, inclusi;

2) il minimo rispetto a t del prodotto delle indeterminazioni di H e X in $|\psi(t)\rangle$ e gli istanti di tempo, t_{min}, in cui viene raggiunto.

3) Si dica, giustificandolo, se per gli stati $|\psi(t_{min})\rangle$ il principio di indeterminazione per H e X é soddisfatto come eguaglianza.

4) Denotato con $\mathcal{P}$ l'operatore di paritá, si determinino i trasformati per paritá degli operatori di creazione, $a^\dagger$ e distruzione a e se ne deduca che i vettori $|n\rangle$ sono autostati di $\mathcal{P}$.

5) Si discuta perché a priori é possibile scrivere l'osservabile $\sin(\pi\mathcal{P}/4)$ in funzione di H e se ne determini la forma esplicita.

6) Si dimostri che a non é un operatore limitato.

SOLUZIONE

1) Normalizziamo il ket: $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1 + 4$, quindi il ket normalizzato é

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle/\sqrt{5} + 2\ i\ |2\rangle/\sqrt{5}.$$

Poiché $\mathcal{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ il suo evoluto temporale é

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i3\omega t/2}|1\rangle/\sqrt{5} + e^{-i5\omega t/2}2\ i\ |2\rangle/\sqrt{5}.$$

La probabilitá $W^H_{|\psi(t)\rangle}(\mathcal{E}_2 \geq \mathcal{E} \geq \mathcal{E}_4) = W^H_{|\psi(0)\rangle}(\mathcal{E}_2 \geq \mathcal{E} \geq \mathcal{E}_4) = W_2 + W_3 + W_4 = W_2 = 4/5$.

2) Poiché H commuta con l'evoluzione temporale l'indeterminazione per H é indipendente da t. Per calcolarla sfruttiamo $H|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)$ e l'ortonormalitá degli $|n\rangle$.

$$\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = (\hbar\omega 3/2)/5 + 4(\hbar\omega 5/2)/5$$

$$\langle\psi(0)|H^2|\psi(0)\rangle = (\hbar\omega 3/2)^2/5 + 4(\hbar\omega 5/2)^2/5$$

. Quindi $\Delta(H)_{|\psi(t)\rangle} = (\hbar\omega/2)(109/5 - (23/5)^2)^{1/2} = 2\hbar\omega/5$.

Per calcolare l'indeterminazione in X utilizziamo $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ e $X = (\hbar/2m\omega)^{1/2}(a+a^\dagger)$.

$$\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = (\hbar/2m\omega)^{1/2}(i2\langle 1|a|2\rangle e^{-i\omega t}/5 - i2\langle 2|a|1\rangle e^{i\omega t}/5 = 4(\hbar/m\omega)^{1/2}\sin(\omega t)/5$$

$$\langle\psi(t)|X^2|\psi(t)\rangle = (\hbar/2m\omega)(\langle 1|2a^\dagger a+1|1\rangle/5 + 4\langle 2|2a^\dagger a+1|2\rangle/5 = 4(\hbar/2m\omega)23/5$$

. Quindi $\Delta(X)_{|\psi(t)\rangle} = (\hbar/2m\omega)^{1/2}(23/5 - (32/25)\sin^2(\omega t))^{1/2}$, il prodotto delle indeterminazioni minimo si ha dunque per $t_{min} = (2k+1)\pi/2, k \in \mathbf{N}$ e vale $\hbar^{3/2}(\omega/m)^{1/2}\sqrt{166}/25$.

3) $\Delta(H)_{|\psi(t)\rangle}\Delta(X)_{|\psi(t)\rangle} \geq |\langle[X,H]\rangle_{|\psi(t)\rangle}/2|$. Ora $[X,H] = P/m$ e $X = (\hbar m\omega/2)^{1/2}(a - a^\dagger)/i$. Quindi

$$\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle = (\hbar m\omega/2)^{1/2}(2\langle 1|a|2\rangle e^{-i\omega t}/5 + 2\langle 2|a|1\rangle e^{i\omega t}/5 = 4(\hbar m\omega)^{1/2}\cos(\omega t)/5,$$

ma per t_{min} il coseno é 0, quindi il principio di indeterminazione non verificato come eguaglianza.

4) Poiché $\mathcal{P}X\mathcal{P}^\dagger = -X$ e $\mathcal{P}P\mathcal{P}^\dagger = -P$, $\mathcal{P}a\mathcal{P}^\dagger = -a$ e $\mathcal{P}a^\dagger\mathcal{P}^\dagger = -a^\dagger$. Ma $|n\rangle = (a^\dagger)^n/\sqrt{n!}$, quindi $\mathcal{P}|n\rangle = (\mathcal{P}a^\dagger\mathcal{P}^\dagger)^n\mathcal{P}|0\rangle/\sqrt{n!} = (-1)^n|n\rangle$.

5) H commuta con $\mathcal{P}$ e quindi con qualsiasi funzione di $\mathcal{P}$, ma per l'oscillatore armonico H é un ICOC. Osservando che, definito $N = a^\dagger a$, $\mathcal{P} = (-1)^N$, $\sin(\pi\mathcal{P}/4) = \sin(\pi(-1)^N/4) = (-1)^N/\sqrt{2} = (-1)^{(H/\hbar\omega - 1/2)}/\sqrt{2}$.

6) Se a fosse limitato $||a|| = sup_\psi(||a\psi||/||\psi||)$ sarebbe finito, ma $sup_\psi(||a\psi||/||\psi||) \geq sup_n||a|n\rangle|| = sup_n\sqrt{n} = +\infty$.