Istituzioni di Fisica Teorica-Meccanica Quantistica

(16/9/2019)

In un sistema unidimensionale una particella quantistica di massa m si trova immersa in un potenziale $V(x) = -V_0 e^{-(x+1)^2}$ con $V_0 > 0$. All'istante $t = 0$ il suo stato é descritto dalla funzione d'onda (non normalizzata) $\psi(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ ove χ denota la funzione caratteristica.

Si consideri in $L^2(\mathbf{R}, dx)$ l'operatore

$$A = e^{iP/\hbar} \mathcal{P} e^{-iP/\hbar}$$

ove P denota l'operatore momento e $\mathcal{P}$ l'operatore paritá con gli usuali domini di definizione.

Si determinino:

1) il dominio di A, dimostrando che in tale dominio A é autoaggiunto;

2) l'interpretazione fisica dell'osservabile descritta da A;

3) autovalori e autofunzioni di A, discutendo la degenerazione degli autovalori;

4) la probabilitá che una misura di A eseguita a $t \geq 0$ dia come risultato l'autovalore massimo;

5) [facoltativo] il dominio della Hamiltoniana del sistema

Soluzione

1) $||\mathcal{P}\psi|| = ||\psi|| = ||e^{-iP/\hbar}\psi||$, quindi $D(A) = L^2(\mathbf{R}, dx)$.

$$A\psi(x) = e^{iP/\hbar} \mathcal{P} e^{-iP/\hbar} \psi(x) = e^{iP/\hbar} \mathcal{P} \psi(x+1) = e^{iP/\hbar} \psi(-x-1) = \psi(-x-2).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)^* \psi(-x-2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-y-2)^* \psi(y) dy,$$

con il cambio di variabile $y = -x - 2$.

2) A descrive una riflessione con asse $x = -1$.

3) $e^{iP/\hbar} \mathcal{P} e^{-iP/\hbar} \psi(x) = \lambda \psi(x) \longrightarrow \mathcal{P} e^{-iP/\hbar} \psi(x) = \lambda e^{-iP/\hbar} \psi(x).$

Ma $\mathcal{P}^2 = \mathbf{1}$, quindi $\sigma(\mathcal{P}) = \pm 1$, allora $\mathcal{P} e^{-iP/\hbar}\psi(x) = \pm e^{-iP/\hbar}\psi(x)$, pertanto $\sigma(A) = \pm 1$. Come per le autofunzioni di $\mathcal{P}$ le corrispondenti autofunzioni di A sono $\psi_\pm(x) = ((\mathbf{1} \pm A)/2)\psi(x) = (\psi(x) \pm \psi(-x-2))/2$. Poiché per ogni base $\psi_n(x)$ le funzioni $\psi_{n\pm} = (\psi_n(x) \pm \psi_n(-x-2))/2$ sono autofunzioni di A di autovalori ± 1, $\psi_n = \psi_{n+} + \psi_{n-}$ e le funzioni $\psi_{n\pm}$ sono tutte ortogonali tra loro, la degeneerazione di ± 1 infinita.

4) Poiché $AHA = H$ essendo V invariante per riflessione con asse $x = -1$, l'evoluzione temporale non cambia le probabilitá, possiamo quindi calcolare la probabilitá di trovare 1 (autovalore massimo) $P^A(1)$ a $t = 0$. $A\psi(x) = \chi_{[-1,1]}(-x-2) = \chi_{[-3,-1]}(x)$, quindi $\langle A \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(x)\chi_{[-3,-1]}(x) = 0$. Ma $\langle A \rangle_\psi = P^A_\psi(1) - P^A_\psi(-1)$ e $P^A_\psi(1) + P^A_\psi(-1) = 1$, quindi la probabilitá richiesta 1/2.

5) Poiché il potenziale é C^∞ e limitato il dominio é quello dell'Hamiltoniana libera: $D(H) = \{\psi \in L^2(\mathbf{R}, dx) | p^2\tilde{\psi}(p) \in L^2(\mathbf{R}, dp)\}$.