Istituzioni di Fisica Teorica-Meccanica Quantistica

(2/9/2019)

In un sistema unidimensionale una particella quantistica di massa m si trova confinata in una buca di potenziale infinitamente profonda nell'intervallo [-1,1]. Una osservabile del sistema é descritta dall'operatore $A = X^{-1}PX^{-1}$, con X operatore posizione e P operatore momento che agiscono in $\mathcal{H} = L^2([-1,1], dx)$.

1) Si dimostri che A é autoaggiunto nel suo dominio naturale con le condizioni al bordo per le funzioni d'onda ψ del dominio:

$$\psi(-1) = -\psi(1)$$

2) Si determinino autovalori e autofunzioni di A.

3) Si supponga che una misura ideale di prima specie di A eseguita a $t = 0$ abbia dato come risultato 0. Si determini lo stato del sistema a $t > 0$.

4) Si discuta criticamente il limite minimo del prodotto delle fluttuazioni per X^3 e A per misure eseguite simultaneamente.

SOLUZIONE

1) $X^{-1}PX^{-1}\psi(x) = x^{-1}(-i\hbar d/dx)(x^{-1}\psi(x))$

Per $\phi \in D(A^\dagger), \psi \in D(A)$,

$$(\phi, A\psi) = \int_{-1}^{1} \phi^*(x)x^{-1}(-i\hbar d/dx)(x^{-1}\psi(x)) = -i\hbar(x^{-1}\phi(x))^*(x^{-1}\psi(x)|_{-1}^{1}$$

$$+\int_{-1}^{1}(i\hbar d/dx)\phi^*(x)x^{-1}(x^{-1}\psi(x)) = (\phi(1)^* + \phi(-1)^*)\psi(1) + (A^\dagger\phi, \psi)$$

2)

$$x^{-1}(-i\hbar d/dx)(x^{-1}\psi(x)) = \lambda\psi(x) \to (d/dx)(x^{-1}\psi(x)) = i\hbar^{-1}\lambda x^2(x^{-1}\psi(x))$$

$$\to \psi(x) = Cx\exp(ix^3\lambda/3); \psi(1) = -\psi(-1) \to \lambda = 3n\pi, n \in \mathbf{Z}$$

Normalizzando $\psi_n(x) = (3/2)^{1/2}x\exp(ix^3n\pi)$.

3) Autofunzioni di H: $\phi_m(x) = \cos(m\pi x/2)$ per m dispari, $\sin(m\pi x/2)$ per m pari, positivi; autovalori $E_m = \hbar^2 m^2 \pi^2/(8m)$.

$$\psi_0(x,t) = \sum_{m \quad pari=2}^{\infty} \int_{-1}^{1} \sin(m\pi x/2)(3/2)^{1/2} x dx \exp(-iE_m t/\hbar) +$$

$$\sum_{m \quad dispari=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \cos(m\pi x/2)(3/2)^{1/2} x dx \exp(-iE_m t/\hbar)$$

$$\int_{-1}^{1} \sin(m\pi x/2)(3/2)^{1/2} x dx = 4 \cdot 6^{1/2}/(m\pi)^2(-1)^{m/2}$$

$$\int_{-1}^{1} \cos(m\pi x/2)(3/2)^{1/2} x dx = 0$$

4)

$$[A, X^3] = X^{-1}PX^2 - X^2PX^{-1} \to x^{-1}(-i\hbar d/dx)(x^2\psi(x)) + x^2(i\hbar d/dx)(x^{-1}\psi(x)) = -3i\hbar\psi(x)$$

Quindi per $\psi, A\psi, X^3\psi \in D(A) \cap D(X^3) = D(A)$,

$$(\Delta A)_\psi (\Delta X^3)_\psi \geq 3\hbar/2.$$

Si noti che $\psi \in D(A) \to x^3\psi \notin D(A)$ a meno che $\psi(1) = 0 = \psi(-1)$.