Istituzioni di Fisica Teorica-Meccanica Quantistica

(8/1/2019)

Una particella quantistica di massa m in un piano ha una Hamiltoniana data da

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{ma}{2}(X^2 + Y^2 + 2bXY) \qquad (1)$$

con $a > 0$ e b reale con $|b| < 1$.

1) Detto L l'operatore momento angolare ortogonale al piano e posto

$$U(\phi) = \exp[\frac{1}{i\hbar}\phi L]$$

con $\phi \in \mathbf{R}$, l'operatore $H_\phi = U(\phi)HU(\phi)^\dagger$ é ancora un polinomio del secondo ordine in P_x, P_y, X, Y; se ne determinino i coefficienti in funzione di ϕ.

2) Si determini lo spettro di H.

3) Si dica quale relazione deve soddisfare b affinché lo spettro sia non degenere.

4) Posto $\omega_x = [a(1-b)]^{1/2}, \omega_y = [a(1+b)]^{1/2}$ sia

$$\psi(x, y) = \exp[-\frac{1}{4}\frac{m\omega_x}{\hbar}(x-y)^2 - \frac{1}{4}\frac{m\omega_y}{\hbar}(x+y)^2][1 + 2(\frac{m\omega_x}{2\hbar})^{1/2}(x-y)]$$

la funzione d'onda in rappresentazione $\vec{X}$ a $t = 0$. Se ne calcoli l'evoluto temporale a $t > 0$.

N.B. Possono essere utili le formule :

i)

$$\exp(A)B\exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[A, [A, ...[A, B]...]]$$

dove A, B sono operatori e i commutatori nella formula scritta sono n

ii) le funzioni di Hermite possono scriversi nella forma

$$h_n(x) = (2^n n!\pi^{1/2})^{-1/2}(x - d/dx)^n \exp(-x^2/2).$$

SOLUZIONE

1) Poiché L é il generatore delle rotazioni, per qualsiasi operatore A l'operazione $U(\phi)AU(\phi)^\dagger$ deve corrispondere a una rotazione eseguita su A. Per verificare di quale angolo possiamo ad esempio vedere l'azione su X utilizzando la formula i) in NB, ottenendo $U(\phi)XU(\phi)^\dagger = X\cos\phi + Y\sin\phi$, quindi la rotazione é di un angolo $-\phi$. Chiaramente $P_x^2 + P_y^2$ e $X^2 + Y^2$ sono invarianti per rotazione e $U(\phi)XYU(\phi)^\dagger = U(\phi)XU(\phi)^\dagger U(\phi)YU(\phi)^\dagger = (X\cos\phi + Y\sin\phi)(-X\sin\phi + Y\cos\phi)$. (Alternativamente si potevano ruotare separatamente tutte le variabili in modo analogo, se non si riconosceva l'invarianza dei primi due termini). Il risultato é $H_\phi = \frac{P_x^2+P_y^2}{2m} + \frac{ma}{2}[X^2(1 - b\sin(2\phi)) +Y^2(1 + b\sin(2\phi)) + 2bXY(\cos(2\phi))]$

2) Poiché lo spettro é invariante per trasformazioni unitarie, possiamo scegliere ϕ in modo da annullare il termine con XY, cioé $\phi = \pi/4$. Il risultato é la somma di due Hamiltoniane di oscillatore armonico unidimensionale, che commutano tra di loro con pulsazioni proprio ω_x e ω_y. Quindi lo spettro di H é dato da $\hbar\omega_x(n_x + 1/2) + \hbar\omega_y(n_y + 1/2)$ con $n_x, n_y \in N$.

3) C'é degenerazione se per qualche $(n_x, n_y) \neq (n'_x, n'_y)$ si ha $\hbar\omega_x(n_x+1/2)+\hbar\omega_y(n_y+1/2) = \hbar\omega_x(n'_x+1/2)+\hbar\omega_y(n'_y+1/2)$, cioé se $\omega_x/\omega_y = (n'_y-n_y)/(n_x-n'_x) \in Q$ se $(n_x-n'_x) \neq 0$ oppure l'analoga condizione per l'inverso se $(n_y-n'_y) \neq 0$. Quindi la condizione di non-degenerazione é $(1-b)^{1/2}/(1+b)^{1/2} \notin Q$.

4) $H_{\pi/4}$ é la somma delle Hamiltoniane commutanti di due oscillatori armonici e gli autostati di H si ottengono dagli autostati di $H_{\pi/4}$ applicandovi $U(\pi/4)$ che genera sulle coordinate la rotazione di $\pi/4$. Confrontando con le espressioni delle funzioni di Hermite date nel punto ii) di NB ci si accorge che $\psi(x, y)$ é data dalla combinazione lineare delle autofunzioni di H con $(n_x, n_y) = (0, 0)$ e $(1, 0)$ con coefficiente relativo $2^{1/2}$. Quindi

$$\psi(x, y; t) = \exp[-\frac{1}{4}\frac{m\omega_x}{\hbar}(x-y)^2 - \frac{1}{4}\frac{m\omega_y}{\hbar}(x+y)^2][\exp[-it(\omega_x + \omega_y)/2]$$

$$+2\exp[-it(3\omega_x + \omega_y)/2](\frac{m\omega_x}{2\hbar})^{1/2}(x-y)].$$