FACOLTA` DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ENERGETICA
PROVA SCRITTA DI COMPLEMENTI DI FISICA
10/02/2009

Nome --

Matricola--

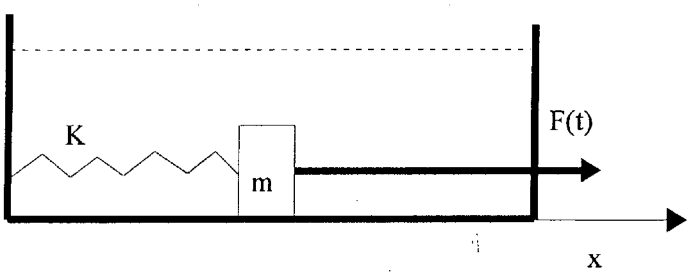
Ogni domanda vale 3 punti.

Problema 1

Sul fondo di una piscina piena di acqua e` posato un blocco di massa m=15 kg, libero di muoversi, come in figura. Le due facce del blocco sono collegate rispettivamente a una molla di costante elastica k e a un'asta sottile, priva di massa, che imprime al blocco la forza $F(t)=F_0 sen(\omega t)$ N, con pulsazione ω che può essere scelta a piacere. Durante il moto il blocco risente di una forza dovuta alla resistenza dell'acqua $F_v= -\lambda v$, con $\lambda=15$ Ns/m. Si osserva che l'ampiezza massima del moto oscillatorio del blocco e` pari a $A(\nu_R)=0.5$ m, in corrispondenza della frequenza $\nu_R= 0.5$ Hz.

Determinare:

1) La costante elastica k della molla;
2) Il valore di F_0;
3) La pulsazione ω_l in corrispondenza della quale lo sfasamento tra la forza F(t) e lo spostamento x(t) e` pari a $\varphi=\pi/4$, e l'ampiezza del moto a questa pulsazione, $A(\omega_l)$.



1) $ma = F - kx - dv$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{d}{m}\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t)$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\begin{cases} \omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 = (2\pi \nu_R)^2 \\ \omega_R = 3.14 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$\gamma = \frac{d}{2m} = 0.5 \, s^{-1}$

$\omega_0^2 = \omega_R^2 + 2\gamma^2 \Rightarrow \omega_0 = 3.22 \text{ rad/s}$

$k = m\omega_0^2 = 155.5 \, N/m$

2) $$A(\omega_R) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + 4\gamma^2\omega_R^2}} = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

$F_0 = A(\omega_R) 2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 23.9 \, N$

3) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 \Rightarrow \omega^2 - 2\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$$

$\omega = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2} \Rightarrow \omega_1 = 3.8 \text{ rad/s}$

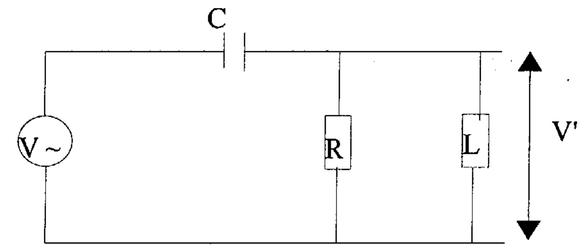
$$A(\omega_1) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2}} = 0.31 \, m$$

Problema 2

Si consideri il seguente circuito in regime di corrente alternata, dove $R=10^3\Omega$, $L=1.35$ H, $V_0=300$ V.

Determinare:

1) Il valore della capacita` C per avere una pulsazione di risonanza pari a $\omega_R=485$ rad/s;
2) Il valore massimo della corrente complessiva che fluisce nel circuito alla risonanza, I_{max};
3) Il valore massimo del modulo della tensione V' alla risonanza;
4) Lo sfasamento tra V' e V alla risonanza;



1) $Z_{TOT} = Z_{LR} + Z_C$

$$\frac{1}{Z_{LR}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} \Rightarrow Z_{LR} = \frac{\omega L R(\omega L + iR)}{R^2+\omega^2L^2}$$

$$Z_{TOT} = \frac{\omega^2L^2R}{R^2+\omega^2L^2} + i\left(\frac{R^2\omega L}{\omega^2L^2+R^2} - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\mathrm{Im}\, Z_{TOT} = 0 \Rightarrow C = \frac{R^2+\omega^2L^2}{\omega^2 L R^2} = 4.5\,\mu F$$

2) $$I^{MAX} = \frac{V_0}{Z_{TOT}(\omega_R)} \; ; \quad |Z_{TOT}(\omega_R)| = \frac{\omega^2L^2R}{R^2+\omega^2L^2} = 300\,\Omega$$

$$\Rightarrow I^{MAX} = 1A$$

$) \ |V'|^{MAX} = I^{MAX} \, |Z_{RL}|$

$|Z_{RL}| = \left(\dfrac{\omega^4 L^4 R^2 + \omega^2 L^2 R^4}{\omega^2 L^2 + R^2} \right)^{1/2} = 547.8 \, \Omega$

$\Rightarrow |V'|^{MAX} = 547.8 \ V$

$) \ V'(\omega_R) = I \, Z_{RL} = \dfrac{V}{Z_{TOT}} Z_{RL} = \dfrac{V_0 e^{i\omega t}}{Z_{TOT}} Z_{RL}$

$Z_{RL} = |Z_{RL}| e^{i\varphi}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{R}{\omega L} \, ; \quad Z_{TOT}(\omega_R) = |Z_{TOT}|$

$\Rightarrow$ sfasamento $\varphi = 56.8°$

Problema 3

Una lamina trasparente, di spessore d_1=1.25 μm e indice di rifrazione n=1.5, viene illuminata perpendicolarmente con radiazione di lunghezza d'onda λ_1. Si verifica che in tali condizioni l'interferenza della radiazione riflessa dalle due superficie della lamina presenta un massimo di ordine m. Illuminando la stessa lamina con radiazione di lunghezza d'onda λ_2, si e` in presenza di un massimo di interferenza di ordine m+1. La differenza tra le due lunghezze d'onda e` pari a $\Delta\lambda=1.51\cdot10^{-7}$m.

Trascurando le riflessioni multiple determinare:

1) Le lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 e gli ordini (m e m+1) dei massimi di interferenza corrispondenti;
2) Il rapporto tra l'intensità della radiazione che emerge dalla lamina dopo averla attraversata completamente e l'intensità della radiazione incidente;
3) Il rapporto r_A^2 tra l'intensità della radiazione riflessa e quella incidente, se si illumina una lamina di spessore $d_2=d_1/2$ con radiazione di lunghezza d'onda λ_1;
4) Il minimo spessore $d_3 > d_1$ che deve avere una lamina affinché il rapporto tra l'intensità della radiazione riflessa e incidente sia pari a r_A^2 (uguale alla domanda precedente), se viene illuminata da radiazione di lunghezza d'onda λ_2.

$$) \; d_1 = (2m-1)\frac{\lambda_1}{4n} = (2(m+1)-1)\frac{\lambda_2}{4n}$$

$$(2m-1)\lambda_1 = (2m+1)\lambda_2$$

$$\lambda_1 = \frac{2m+1}{2m-1}\lambda_2 > \lambda_2 \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 =$$

$$= \left(\frac{2m+1}{2m-1} - 1\right)\lambda_2 = \frac{2\lambda_2}{2m-1} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2m-1}{2}\Delta\lambda = \frac{4nd_1}{2m+1}$$

$$(2m-1)(2m+1)\Delta\lambda = 8nd_1$$

$$m^2 - 1 = \frac{8nd_1}{\Delta\lambda} \Rightarrow m = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8nd_1}{\Delta\lambda}} = 5$$

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{4 n d_1}{9} = 8.33 \cdot 10 \ m \\ m = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_2 = \dfrac{4 n d_1}{11} = 6.82 \cdot 10^{-7} m \\ 1 + m = 6 \end{cases}$$

2) $R = \left(\dfrac{1-n}{1+n} \right)^2 = 0.04; \quad T = 1 - R = 0.96$

$T^2 = 0.92$

3) $r_A^2 = 4R \sin^2 \left(\dfrac{2\pi d_1 n}{2 d_1} \right) = 0.080$

4) $4R \sin^2 \left(\dfrac{2\pi d_3 n}{d_2} \right) = 4R \sin^2 \left(\dfrac{\pi d_1 n}{d_1} \right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\pi d_3 n}{d_2} = \dfrac{\pi d_1 n}{d_1} + N\pi \quad (a) \\ \text{OPPURE} \\ \dfrac{2\pi d_3 n}{d_2} = \pi - \dfrac{\pi d_1 n}{d_1} + N\pi \quad (e) \end{cases}$$

$\Rightarrow d_3 = \dfrac{d_2}{2n} \left(\dfrac{d_1 n}{d_1} + N \right) = 5.12 \cdot 10^{-7} + 2.27 \cdot 10^{-7} N \ (a)$

$d_3 = \dfrac{d_2}{2n} \left(1 - \dfrac{d_1 n}{d_1} + N \right) = -2.84 \cdot 10^{-7} + 2.27 \cdot 10^{-7} N \ (e)$

$\Rightarrow d_3^{MIN} = 1.42 \ \mu m \quad (a)$

$\boxed{d_3^{MIN} = 1.31 \ \mu m \quad (e)}$