

Nome -----

Matricola-----

Ogni domanda vale 3 punti.

Problema 1

Una sfera di alluminio di massa $m=150$ grammi e densita' $\rho_A=2.7 \cdot 10^3$ kg/m^3 viene lasciata cadere in un serbatoio contenente olio fino al livello h , partendo con velocita' nulla dalla superficie libera del liquido, come in figura. Assumendo il moto in regime laminare, la sfera risente di una forza di attrito viscoso data dalla legge di Stokes $F=-6\pi\eta Rv$, dove R e' il raggio della sfera e η e' la

viscosita' dell'olio.

Determinare:

- 1) La velocita' limite di caduta della sfera nell'olio. Si assuma $\rho_{olio}=800$ kg/m^3 e $\eta_{olio}=0.25$ kg/ms ;

- 2) L'altezza h dell'olio nel serbatoio, se la sfera impiega 1.5 secondi per arrivare sul fondo;

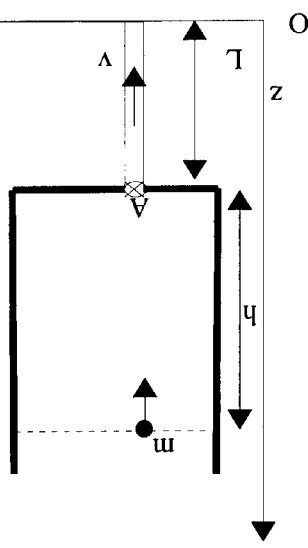
Successivamente il serbatoio viene svuotato dell'olio e viene riempito di acqua fino allo stesso livello h ($\rho_{acqua}=10^3$ kg/m^3). Ad un certo istante viene aperto un rubinetto sul fondo del serbatoio (A

in figura) in modo che l'acqua fluisca in caduta libera all'interno di un tubo verticale di raggio

$r=1$ cm e lungo $L=3$ m. Assumendo la sezione del serbatoio molto piu' grande di quella del tubo,

trascurando il volume del tubo, e considerando l'acqua un fluido ideale, si determini:

- 3) La potenza massima P_{max} , ottenibile sfruttando la caduta dell'acqua e trascurando le dissipazioni di energia;
- 4) Qual e' il livello dell'acqua nel serbatoio in corrispondenza del quale si ottiene una potenza $P=P_{max}/2$



$$1) m = \frac{4}{3} \pi r^2 \rho \Rightarrow r = \left(\frac{3m}{4\pi\rho} \right)^{1/3} = 0.024 \text{ m}$$

$$ma = mg - F_A - c \pi \eta R v$$

$$F_A = \frac{4}{3} \pi r^2 \rho g = V \rho g$$

$$a = g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) - \frac{2 \eta^2 c \pi}{3 \rho r} = \frac{dv}{dt} = (6.898 - 0.223v) \text{ m/s}^2$$

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv \Rightarrow \int_0^v \frac{v}{A - Bv} = \int_0^t dt$$

$$k_n \quad A - Bv = -Bt \Rightarrow v(t) = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt})$$

$$v_L = \frac{A}{B} = 9.5 \text{ m/s}$$

$$2) k = \int_0^t v_L (1 - e^{-Bt}) dt = v_L \left[t + \frac{e^{-Bt}}{-B} \right]_0^t =$$

$$= v_L \left[t + \frac{e^{-Bt}}{-B} - \frac{1}{-B} \right] = 5.6 \text{ m}$$

$$3) \rho_0 + \rho g (h+L) + \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

$$v_0^2 = 2g(h+L) \Rightarrow v_0 = 12.99 \text{ m/s}$$

$$dW = dm (v_0^2 - v^2) = dm \frac{v^2}{2} = \rho dV v_0^2 = \rho dV g h$$

$$0 = \frac{1}{2} v^2 = 3.14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \Rightarrow g = v_0^2 = 4.1 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

$$f = \frac{dW}{dt} = \rho g (h+L) \frac{dV}{dt} = \rho g (h+L) \frac{dV}{dt}$$

$$f = 226.9 \text{ W}$$

Problema 2

Un fascio di luce polarizzato rettilineamente si propaga in aria e incide con un angolo di incidenza $\theta_i = 80^\circ$ su un mezzo trasparente di indice di rifrazione $n = 1.5$. Si osserva che l'angolo di polarizzazione della luce trasmessa e' $\beta_t = 45^\circ$.

Determinare:

- 1) L'angolo di polarizzazione della luce incidente, β_i
- 2) Il grado di polarizzazione della luce incidente;
- 3) La percentuale di luce trasmessa.

1) $\beta_i = \theta_i = n \theta_t \Rightarrow \theta_t = \arcsin \frac{\theta_i}{n} = 41^\circ$

$$t_n = \frac{2 \alpha \theta_t \cos \theta_i}{2 \alpha (\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} = 0.342$$

$$t_r = \frac{2 \alpha \theta_t \cos \theta_i}{2 \alpha (\theta_i + \theta_t)} = 0.266$$

$$\left\{ \begin{aligned} E_{otn} &= E_{oin} t_n \\ E_{otr} &= E_{oir} t_r \end{aligned} \right.$$

$$= 0.4 m$$

$$\left(\frac{E_{otn}}{E_{otr}} \right)^{2/3} = \rho(\theta_i + \theta_t) \Rightarrow \rho' = \rho \left(\frac{E_{otn}}{E_{otr}} \right)^{2/3}$$

$$a) \rho' = \rho(\theta_i + \theta_t) \Rightarrow \rho' = \rho \left(\frac{E_{otn}}{E_{otr}} \right)^{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$T = 0.571$$

$$v_6 = \frac{v_2(r_1 + r_2)}{r_1 - r_2} = 0.737$$

$$v_2 = \frac{v_6(r_1 - r_2)}{r_1 + r_2} = 0.487$$

$$\begin{cases} T_6 = 1 - R_6 = 1 - v_6^2 = 0.455 \\ T_2 = 1 - R_2 = 1 - v_2^2 = 0.763 \end{cases}$$

$$\} T = T_2 \omega_2^2 + T_6 \omega_6^2$$

$$= \frac{E_0^2 (\omega_2^2 + \omega_6^2)}{E_0^2 (\omega_2^2 - \omega_6^2)} = 0.246$$

$$(i) P = \frac{W_6 + W_2}{W_6 - W_2} = \frac{I_6 + I_2}{I_6 - I_2} = \frac{E_0^2 + E_0^2}{E_0^2 - E_0^2}$$

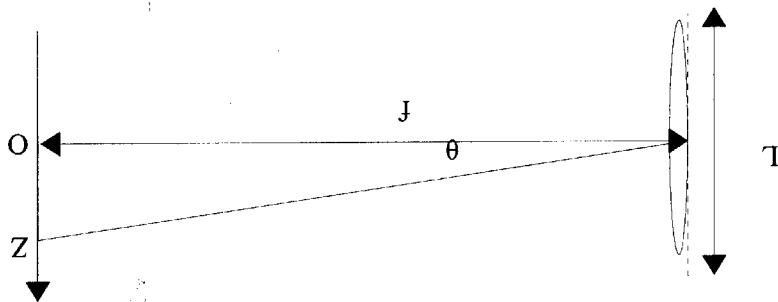
$$E_0 = \frac{E_2}{v_2} = E_6 \Rightarrow E_2 = v_2 E_6 = \frac{E_0}{v_2} = 0.737 E_0$$

Problema 3

Un reticolo di diffrazione è costituito da $N=1000$ fenditure di larghezza a . Le frange di interferenza si osservano su uno schermo posto sul piano focale di una lente sottile convergente, adiacente al reticolo, di lunghezza focale $f=1$ m. Si osserva che, a causa della diffrazione, sono soppressi i massimi di interferenza di ordine $m=6m'$ ($m'=1, 2, 3, \dots$). Se il reticolo viene illuminato con luce di lunghezza d'onda $\lambda_1=589$ nm, si osserva che la prima frangia soppressa si trova sullo schermo a $z_1=5$ cm dall'asse del reticolo.

Determinare:

- 1) Quante righe si osservano con intensità superiore al 10% di quella della riga centrale;
- 2) La larghezza a delle fenditure, il passo d e la larghezza L del reticolo;
- 3) Di quanto si sposta il massimo di interferenza di ordine $m=4$ se si illumina il reticolo con luce di lunghezza d'onda $\lambda_2=486$ nm invece di λ_1 ;
- 4) La larghezza sullo schermo della riga del massimo di interferenza di ordine $m=4$ per la lunghezza d'onda λ_1 .



$$\left(\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{m}{m'} = \frac{1}{6} \Rightarrow d = 6a \right)$$

$$m = \left[\frac{m \frac{d}{\lambda}}{2a} \right] = \left[\frac{m \frac{6}{\lambda}}{2a} \right]$$

$\Rightarrow 4 \times 2 = 8$ righe oltre alla centrale.

) MINIMI DI DIFFRAZIONE:

$$2a \sin \theta = m \lambda \quad ; \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta \Rightarrow \frac{2a \sin \theta}{\lambda} = 2.88$$

$$\Delta z = f \Delta \theta_{max} = 16.6 \mu m$$

$$\theta_{max} = 1.91^\circ$$

$$I_m \theta = m \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \Delta \theta_{max} = \frac{\lambda}{2d_1} = \frac{1.66 \cdot 10^{-5} \text{ rad}}{2d_1} = \Delta \theta_{max}$$

MINI INTERF.

$$\Rightarrow z_{max}^2 = 2.7 \text{ cm} \Rightarrow \Delta z = 5.5 \text{ mm}$$

$$z_{max}^2 = f^2 \theta_{max}^2 \Rightarrow \theta_{max} = \frac{z_{max}}{f} = \frac{5.5 \text{ cm}}{1.57 \text{ m}} = 1.57^\circ$$

$$z_1 = 3.3 \text{ cm}$$

$$\theta_{max} = m \frac{\lambda}{d} = \frac{z_1}{f} \Rightarrow \theta_{max} = 1.91^\circ$$

$$z_1 = f \theta_{max}$$

$$L = Nd = 7.08 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{d \theta_{max}}{m} = \frac{1.18 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{7.08} = 1.66 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$