FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica
Canale ....
Prova scritta del 4 Settembre 2007

Problema 1

Un corpo puntiforme può muoversi lungo una circonferenza orizzontale di raggio R = 0.6 m. Nell'istante t = 0 il corpo inizia a muoversi con velocità angolare iniziale nulla e accelerazione angolare $\alpha = 3.1\ s^{-2}$. Calcolare:

1. la velocità del corpo al compimento del decimo giro; v=.............
2. il modulo dell'accelerazione del corpo nell'istante $t_1 = 0.5$ s; a=..............
3. l'angolo che il vettore accelerazione fa con la direzione della velocità a t_1. θ=............

Il moto è uniformemente accelerato lungo la circonferenza. Si ha dunque:

$$\begin{cases} \omega^2(\theta) - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \\ v = \omega R \end{cases} \qquad \theta = 2\pi \cdot 10 \quad \omega = 19.73 s^{-1} \qquad \Rightarrow \quad v = 11.84 m/s$$

Il vettore accelerazione è costituito dalle componenti tangenziale e normale. Si ha:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \qquad a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \qquad a_T = \alpha R = 1.86 m/s^2 \qquad a_N = \omega^2 R = 1.44 m/s^2$$

$$a = 2.35 m/s^2$$

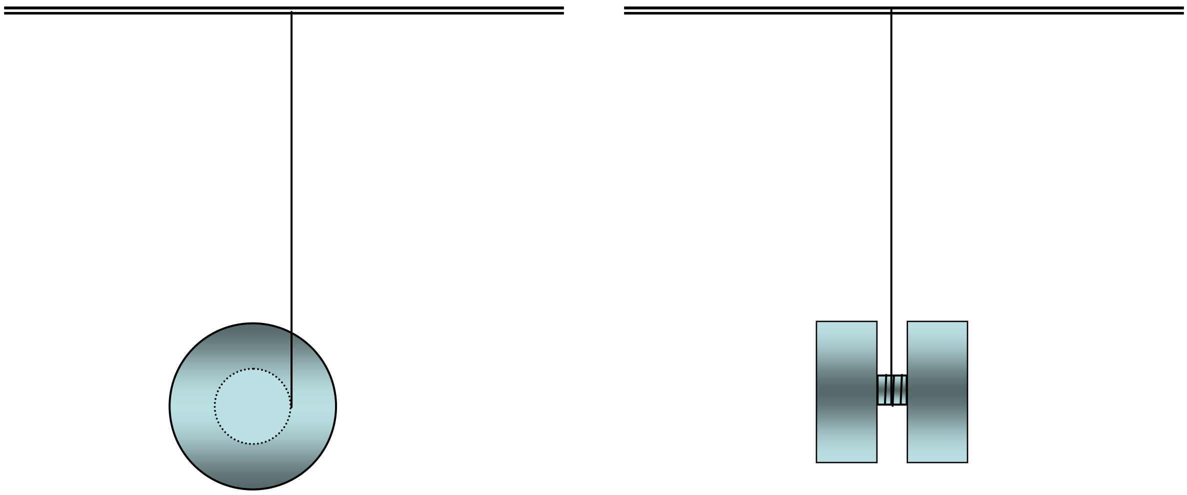
L'accelerazione tangenziale ha la stessa direzione della velocità per cui si ha:

$$tg\theta = \frac{a_N}{a_T} = 0.775 \qquad \theta = arctg\theta = 38°$$

Problema 2

Uno yo-yo è schematizzabile con due dischi omogenei, di massa M = 150 g e raggio R = 4.0 cm, ciascuno, saldati nei centri ad un mozzo (cilindro pieno di raggio R/4 e massa m = 20 g); un filo è avvolto al mozzo mentre l'altro capo del filo è fissato ad un supporto orizzontale. Lo yo-yo può scendere rotolando attorno al filo man mano che questo si svolge.
Calcolare:

a) l'accelerazione del CM dello yo-yo (centro dei dischi); a=.......................
b) la tensione del filo; T=....................
c) l'energia cinetica di rotazione e quella di traslazione dello yo-yo quando, partendo da fermo, si è svolto un tratto di filo h = 30 cm. E_{KR}=............. E_{KT}=.................



Lo yo-yo trasla, sotto l'azione della sua forza peso e della tensione del filo, e contemporaneamente ruota attorno al suo CM. Traslazione e rotazione sono legate tra loro dalla formula $v=\omega r$ (con r distanza dell'asse istantaneo di rotazione dal CM). Si riferisca, ad esempio, il moto ad un sistema di riferimento in cui gli assi x e y sono rivolti verso destra e verso l'alto e l'asse z è perpendicolare al foglio e uscente. In questo sistema l'accelerazione di gravità e negativa mentre la tensione del filo è positiva (lungo y). Se si prende il punto di contatto (asse istantaneo di rotazione) come polo per le rotazioni l'unica forza che dà momento è la forza peso per cui, chiamando τ il momento della forza, si ha:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{r} = -\frac{R}{4}\vec{u}_x \qquad \vec{F} = -(2M+m)g\vec{u}_y \qquad \vec{\tau} = (2M+m)g\frac{R}{4}\vec{u}_z = 3.136 \cdot 10^{-2}\vec{u}_z Nm$$

La seconda equazione cardinale, considerando che il momento di inerzia va calcolato rispetto al punto di contatto, diventa dunque:

$$I\alpha = \tau \qquad I = 2\frac{MR^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 + 2M\left(\frac{R}{4}\right)^2 + m\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}\left(3M + \frac{m}{4}\right)R^2 = 2.73 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = 114.87 s^{-2} \qquad |a_{CM}| = \alpha\frac{R}{4} = 1.1487 = 1.15 m/s^2$$

La prima equazione cardinale dà allora:

$$-(2M+m)a_{CM} = -(2M+m)g + T \qquad T = (2M+m)(g - a_{CM}) = 2.768 = 2.77 N$$

Il problema si può risolvere anche considerando come polo per le rotazioni il CM, allora la forza che genera il momento è la tensione. Bisogna allora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -(2M+m)a_{CM} = -(2M+m)g + T \\ I_{CM}\alpha = \tau' \\ |a_{CM}| = \alpha\frac{R}{4} \end{cases} \qquad \vec{\tau}' = \vec{r}' \times \vec{T} \quad \vec{r}' = \frac{R}{4}\vec{u}_x \qquad \vec{T} = T\vec{u}_y \qquad \vec{\tau}' = \frac{R}{4}T\vec{u}_z$$

$$I_{CM} = 2\frac{MR^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \left(M + \frac{m}{32}\right)R^2 = 2.41 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

Per risolvere l'ultima domanda si applica il teorema dell'energia cinetica:

$$W = \Delta E_K \qquad W = (2M+m)gh \qquad \Delta E_K = E_{K,f} - E_{K,i} = E_{K,f}$$

$$E_{K,f} = E_{K,t} + E_{K,r} = \frac{1}{2}(2M+m)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \qquad v_{CM} = \omega\frac{R}{4}$$

Considerando la relazione tra velocità lineare e velocità angolare si ottiene un'equazione in un'incognita. Per esempio, risolvendo per la velocità lineare si ha:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{2M+m}{12M+m}\right)gh} = 0.83m/s \qquad \omega = 83s^{-1}$$

$$E_{K,t} = 0.11J \qquad E_{K,r} = 0.83J$$

Problema 3

1.5 moli di gas ideale sono contenute in un cilindro a pareti rigide, chiuso da un pistone senza massa libero di scorrere senza attrito. La sezione del cilindro é $S = 10^{-2}$ m^2. Tutte le pareti del cilindro ed il pistone sono isolati termicamente, tranne il fondo che è un buon conduttore del calore e si trova a contatto termico con una miscela costituita da una grande quantità di acqua e ghiaccio alla temperatura di fusione. Inizialmente il sistema si trova in equilibrio termodinamico e la sua pressione uguaglia quella atmosferica $p_A = p_0 = 1.0 \times 10^5$ Pa. Una massa M = 30 kg viene posata sopra il pistone e, sempre in presenza della pressione esterna, si lascia che il sistema raggiunga un nuovo stato di equilibrio.

Successivamente il sistema viene riportato allo stato iniziale tramite una trasformazione isoterma reversibile. Si determinino:

- il calore scambiato dal gas nella prima trasformazione Q_1=.........
- il calore scambiato dal gas nella seconda trasformazione Q_2=.........
- la quantità di ghiaccio (acqua) che complessivamente cambia fase nel ciclo (λ_{fus}=335 J/g). m=............

La prima trasformazione è una compressione isoterma irreversibile in presenza della pressione esterna p_B:

$$\begin{cases} n = 1.5 \\ T_A = 273K \\ p_A = p_0 = 10^5\,Pa \\ V_A = \dfrac{nRT_A}{p_A} = 34.04 \cdot 10^{-3}\,m^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} n = 1.5 \\ T_B = 273K \\ p_B = p_0 + \dfrac{Mg}{S} = 1.294 \cdot 10^5\,Pa \\ V_B = \dfrac{nRT_B}{p_0} = 26.31 \cdot 10^{-3}\,m^3 \end{cases}$$

$$Q_1 = W_1 = p_B \Delta V = 1.294 \cdot 10^5 \cdot (26.31 - 34.04) \cdot 10^{-3} = -1000J$$

La seconda trasformazione è un'isoterma reversibile:

$$Q_2 = W_2 = nRT\,ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 873J$$

Complessivamente il gas assorbe dal serbatoio una quantità di calore Q_1+Q_2 e il serbatoio assorbe la stessa quantità cambiata di segno:

$$Q_1 + Q_2 = -127J \qquad Q_{serb} = 127J \qquad m = \frac{Q_{serb}}{\lambda} = 0.38g$$