FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica
Canale ....
Prova scritta del 13 settembre 2006

Soluzione

Problema 1
Un punto materiale di massa m=0.2 kg si trova su un piano orizzontale liscio. Esso può ruotare attorno ad un punto O cui è connesso da un filo inestensibile e di massa trascurabile, di lunghezza l=0.16 m. Inizialmente il filo è teso e il punto ha velocità v_0=0.19 m/s. Sul punto agisce una forza F=0.5 N, costantemente tangente alla traiettoria circolare ed equiversa alla direzione del moto. Il filo ha carico di rottura T_{max}=9.2 N.
Si determinino:

- la tensione iniziale del filo, T=................
- il modulo dell'accelerazione del punto materiale dopo che esso ha percorso mezzo giro, a=................
- dopo quanto tempo dall'istante iniziale il filo si rompe. t=..................

La seconda legge di Newton per il punto materiale si scrive:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}$$

dove le due forze sono la tensione del filo (sempre normale alla traiettoria) e la forza F (sempre tangente alla traiettoria.
All'istante iniziale la tensione del filo è data da:

$$T = \frac{mv_0^2}{l} = 0.045N$$

La forza F, tangente alla traiettoria, genera l'accelerazione tangenziale del moto, che è costante, per cui:

$$a_T = \frac{F}{m} = 2.5m/s^2 \qquad s = \pi l \qquad \pi l = v_0 t + \frac{1}{2}a_T t^2 \Rightarrow \begin{matrix} t = 0.563s \\ t = -0.715s \end{matrix}$$

La soluzione negativa si scarta perchè non ha significato fisico.

$$v = v_o + a_T t \quad \Rightarrow \quad v = 1.597m/s \approx 1.6m/s \quad \Rightarrow \quad a_N = \frac{v^2}{l} = 15.94m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 16.13m/s^2$$

Il filo si rompe quando la tensione (forza centripeta) raggiunge il carico di rottura:

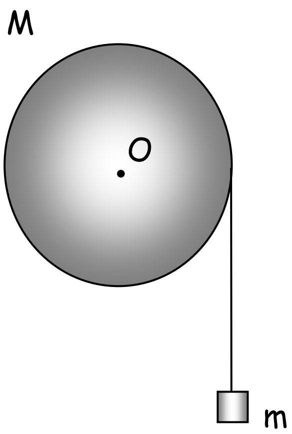
$$T_{max} = \frac{mv^2}{l} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{T_{max}l}{m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T_{max}l}{m}} = 2.713m/s$$

$$v = v_0 + a_T t' \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{v - v_0}{a_T} = 1.009s \approx 1.0s$$

Problema 2

Un disco di raggio R=0.2 m e massa M incognita puo` ruotare in un piano verticale attorno al proprio centro O. Attorno al disco e` avvolto un filo inestensibile e privo di massa a cui e` legato

un corpo di massa m=0.5kg. Inizialmente il sistema viene mantenuto in quiete. All'istante t=0 il corpo di massa m viene lasciato libero di muoversi verso il basso. Quando esso si e` abbassato di h=1.5 m, la sua velocita` e` pari a v=1.5 m/s.
In questo istante il filo si e` completamente svolto e m si stacca.
Determinare:
1) La massa M del disco; M=.......................
2) La tensione del filo; T=..........................
3) Nell'istante in cui m si stacca sul disco inizia ad agire un momento frenante τ_f=0.5 Nm. Determinare il numero di giri descritti dal disco prima di fermarsi.
n=.........................



Le equazioni del moto del disco e della massa sono:

$$\begin{cases} I\alpha = \dfrac{MR^2}{2}\alpha = TR \\ ma = mg - T \\ a = \alpha R \end{cases}$$

Avendo scelto come verso positivo del moto quello verticale verso il basso e, conseguentemente , le rotazioni orarie. L'accelerazione lineare si trae dalla conservazione dell'energia meccanica per il sistema. L'unica forza esterna che fa lavoro è la forza peso della massa m:

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad I = \frac{MR^2}{2} \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

$$mgh = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4m\left(gh - \frac{1}{2}v^2\right)}{v^2} = \frac{4mgh}{v^2} - 2m = 12.07kg$$

La tensione del filo si può trarre dalle equazioni del moto, considerando che l'accelerazione del punto materiale è costante, oppure si può trarre, ancora, dal teorema dell'energia cinetica applicato al punto materiale. Sul punto materiale agiscono la forza peso e la tensione del filo. La forza peso fa lavoro positivo, mentre la tensione fa lavoro negativo:

$$W = \Delta E_{K,m} \qquad mgh - Th = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{h} = 4.53N$$

Sempre il teorema dell'energia cinetica, applicato questa volta aldisco, permette di calcolare in quanti giri esso si ferma:

$$W = \Delta E_{K,D} \qquad -\tau\theta = 0 - \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \Rightarrow \quad \theta = \frac{I\omega^2}{2\tau} = 13.575 rad = 2.16 giri$$

Problema 3

Una quantità n = 0.85 moli di gas ideale biatomico si trova nello stato A (V_A = 6.0 10^{-3} m^3 , T_A= 315 K,). Con una compressione isoterma reversibile in cui scambia il calore Q_{AB} = -1580 J il gas viene portato nello stato B.

1. Calcolare il volume V_B. V_B=....................

La stessa quantita di gas puo passare dallo stato A ad uno stato C (V_C = V_B) con una trasformazione adiabatica reversibile e poi dallo stato C allo stato B con una trasformazione isocora. Calcolare:

2. la temperatura T_C T_C=.........................
3. il calore scambiato e il lavoro (fatto o subito) nella trasformazione A->C->B.

Q_{ACB}=..............

W_{ACB}=..............

La trasformazione AB è isoterma reversibile, per cui il primo principio si può scrivere:

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} \quad \Rightarrow \quad V_B = V_A \exp\left(\frac{Q_{AB}}{nRT_A}\right) = 2.95 \cdot 10^{-3} m^3$$

Nella seconda parte del problema si passa dallo stato iniziale A a quello finale B tramite uno stato intermedio C.

La trasformazione AC è adiabatica reversibile per cui:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 418.4K$$

Un'ulteriore considerazione che si può fare è che, essendo l'energia interna una funzione di stato, la sua variazione sarà la stessa nella trasformazione diretta AB e in quella ACB. Si avrà, perciò, $\Delta U_{AB}=0=\Delta U_{ACB}$. Tenendo in considerazione quanto scritto si avrà:

$$Q_{AC} = 0 = W_{AC} + \Delta U_{AC} \qquad Q_{CB} = W_{CB} + \Delta U_{CB} = 0 + \Delta U_{CB} \qquad \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB} = 0$$

$$W_{AC} = -\Delta U_{AC} = nc_V (T_a - T_C) = W_{ACB} = -1827.1J$$

$$Q_{CB} = nc_V (T_B - T_C) = nc_V (T_a - T_C) = Q_{ACB} = -1827.1J$$