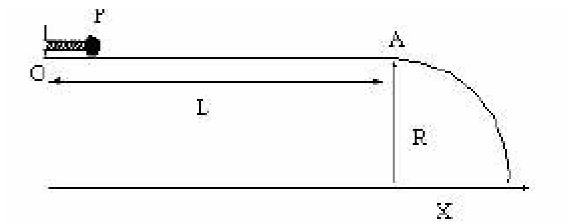
**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

*Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica*
*BIANCO*
*Prova scritta del 18 Marzo 2006*

**Problema 1**
Un punto materiale P di massa m=1 kg può scorrere su un piano orizzontale OA di lunghezza L=5 m contiguo a una guida circolare liscia di raggio R=2 m, come in figura. Il punto P e' inizialmente fermo a contatto dell'estremità di una molla di lunghezza a riposo $l_0$=1 m e costante elastica K incognita, inizialmente compressa della quantità d=0.4 m. Ad un certo istante, P viene lasciato libero di muoversi. $K_{min}$=……………..
Determinare:
1) Il minimo valore di K affinché P si stacchi dal piano orizzontale, supposto liscio, nella posizione A di raccordo tra lo stesso e la guida circolare;
Se K=200 N/m, calcolare:
2) L'angolo $\phi$ tra la velocità di P e l'asse delle x nell'istante in cui P giunge al suolo, se il piano orizzontale OA e' liscio; $\phi$=………………
3) Il massimo coefficiente di attrito dinamico $\mu_d$ tra P e il piano orizzontale OA, supposto scabro, affinché P si stacchi dalla guida circolare ancora nella posizione A; $\mu$=…………..




Se il punto si muove sulla guida circolare, risente di una forza normale.
L'equazione del moto del punto all'inizio della guida è:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N$$

Il punto si stacca dalla guida se non risente della forza normale, quindi se

$$mv^2 = mgR$$

Inizialmente l'energia meccanica del sistema molla-punto è solo dato dall'energia potenziale della molla, quando la molla si rilascia, trasferisce tutta la sua energia potenziale al punto materiale, sotto forma di energia cinetica:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Il minimo valore della costante elastica affinché il punto lasci la guida in A è quindi dato dalla:

$$\frac{1}{2}Kd^2 \geq \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR \quad \Rightarrow \quad K \geq \frac{mgR}{d^2} = 122.5N/m$$

Se il punto lascia la guida la sua velocità iniziale è orizzontale e poi prosegue il suo moto sotto l'azione della forza peso, quindi:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Kd^2}{m}} = 5.65m/s$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v \\ v_y(t) = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = R - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$ Il punto arriverà a terra quando la sua coordinata y sarà nulla.

$$y = 0 \qquad \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2R}{g}} = 0.64s \qquad \Rightarrow \begin{cases} v_x(t_1) = 5.65 m/s \\ v_y(t_1) = -g t_1 = -6.27 m/s \end{cases} \qquad \tan\phi = \frac{v_y}{v_x} = -1.10$$

$$\phi = -47.98°$$

Il massimo coefficiente di attrito dinamico compatibile è quello che fa si che il punto materiale arrivi in A con la minima velocità per cui si stacca dalla guida.
Inizialmente la molla è compressa e trasferisce la sua energia potenziale al punto sotto forma di energia cinetica. La forza di attrito dinamico fa lavoro sul punto e dissipa energia.

$$\Delta E_k = W_{att} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_d m g (L - l_0 + d)$$

$$\frac{1}{2} m g R - \frac{1}{2} K d^2 = -\mu_d m g (L - l_0 + d) =$$

$$\mu = \frac{K d^2 - m g R}{2 m g (L - l_0 + d)} = 0.14$$

**Problema 2**

Un’ asta omogenea di lunghezza L=0.5m e massa m=3.0 kg può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale che passa per un suo estremo O. All’istante iniziale l’asta è ferma in posizione verticale. Essa viene colpita in un suo estremo da un proiettile di massa $m_1$=0.1 kg e velocità v=50 m/s. Dopo l’urto l’asta inizia a ruotare con velocità angolare ω=5 rad/s, mentre il proiettile prosegue il suo moto nella stessa direzione di arrivo.

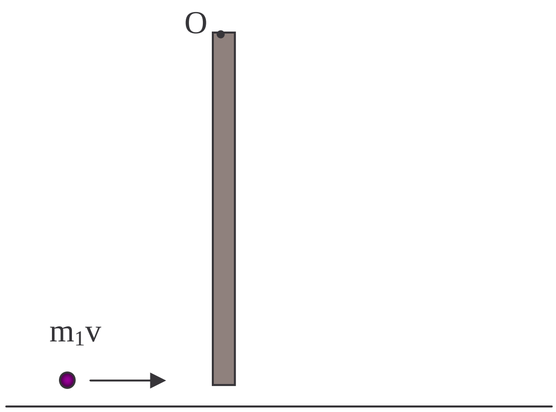
1- Si determini la velocità del proiettile dopo l’urto.

v'=……………….

2- Sull’asse agisce un momento di attrito costante M che fa sì che l’asta si arresti dopo aver ruotato di un angolo θ=π/6. Si determini il modulo del momento di attrito $M_{ATT}$=……………..

3- Si determini l’impulso impresso all’asta durante l’urto.

J=………………..




L’urto è vincolato, si conserva il momento della quantità di moto rispetto al vincolo O.

$$I = \frac{mL^2}{3} = 0.25 kg \cdot m^2 \qquad m_1 v L = I\omega + m_1 v' L \qquad v' = v - \frac{I\omega}{m_1 L} = 25 m/s$$

Il lavoro del momento di attrito è uguale alla variazione di energia meccanica del sistema:

$$E_f = mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) \qquad E_i = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \Rightarrow \quad \frac{mg\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{\pi}{6}} = -M_{att}$$

$$M_{att} = 4.09\,Nm$$

Avendo posto lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nel punto di minimo livello del CM della sbarra (posizione verticale).
L'impulso impresso all'asta è pari alla variazione della sua quantità di moto.

$$J = \Delta P = m\omega\frac{L}{2} = 3.75\,Ns$$

## Problema 3

Un cilindro con 2.0 moli di un gas ideale monoatomico è chiuso da un pistone scorrevole senza attrito, ed è in equilibrio termico con un contenitore entro il quale è posta inizialmente una massa M = 2.3 kg di acqua alla temperatura T. All'istante t = 0, mentre il gas si trova alla pressione atmosferica, viene bloccato il movimento del pistone e viene attivato un dispositivo di raffreddamento che, mediante un fluido refrigerante che scorre entro una serpentina immersa nell' acqua, estrae lentamente calore dal sistema con potenza P = 4.5 W per un tempo $\Delta t$ = 10 ore. Quando il dispositivo di raffreddamento viene spento si verifica che una massa m = 75 g di acqua è diventata ghiaccio. Sapendo che durante la trasformazione il gas si mantiene in equilibrio termico con il contenitore, calcolare:

1) dopo quanto tempo dall'accensione del dispositivo di raffreddamento comincia a formarsi il ghiaccio: t=…………..

2) il volume e la temperatura del gas nello stato di equilibrio iniziale;
$T_i$=…………………$V_i$=……………..

3) il rapporto fra il calore ceduto dal gas e quello ceduto dall'acqua dall'inizio del raffeddamento fino all'istante in cui comincia a formarsi il ghiaccio.
$Q_g/Q_{H2O}$=……..

(Per la soluzione assumere i seguenti valori: pressione atmosferica $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa, calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/kg, calore specifico dell'acqua $c_A$ = 4186.8 J/(kg °K)).

La trasformazione avviene a volume costante. Il lavoro totale fatto dall'esterno è dato da:

$$|W| = Pt = 4.5 \cdot 3600 \cdot 10 = 162 \cdot 10^3 \text{ J} = 162 \text{ kJ}$$

Dal momento che il sistema che eroga la potenza non fa lavoro, tutto il lavoro va in calore sottratto al sistema acqua-ghiaccio+gas ($W=Q_{tot}$).
Il sistema complessivo prima varia la sua temperatura finchè raggiunge quella di equilibrio acqua-ghiaccio, poi inizia a formarsi il ghiaccio. Per formare una quantità di ghiaccio m bisogna sottrarre al sistema una quantità di calore $Q=m\lambda$
$-Q=-24.75$ kJ.
La quantità di calore sottratta al sistema per fargli raggiungere T=273K è data da:

$$|Q_{tot}| - |Q| = 137250\,J$$

Quindi il ghiaccio comincerà a formarsi dopo un tempo t dato dalla:

$$t = \frac{|Q_{tot}| - |Q|}{P} = 30500s = 8.47h$$

Tenuto conto che l'unico calore scambiato dall'esterno con il sistema complessivo è quello sottratto dal dispositivo refrigerante si ha:

$$Q_{tot} = Q + Q_{H2O} + Q_{gas} \qquad -Q_{H2O} = (m_{H2O})c_A(T_0 - T_i) \qquad -Q_{gas} = nC_V(T_0 - T_i)$$

$$T_i = T_0 + \frac{Q_{tot} - Q}{[(m_{H2O})c_A + nC_V]} = 273 + 14.22 = 287.34\ K$$

$$V_i = \frac{nRT_i}{p_0} = 4.72 \cdot 10^{-2}\ m^3$$

$$\frac{Q_{gas}}{Q_{H2O}} = \frac{nC_V \Delta T}{(m_{H2O})c_A \Delta T} = \frac{nC_V}{(m_{H2O})c_A} = 2.59 \cdot 10^{-3}$$