FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica, Meccatronica
Canale ....
Prova scritta del 1 settembre 2006

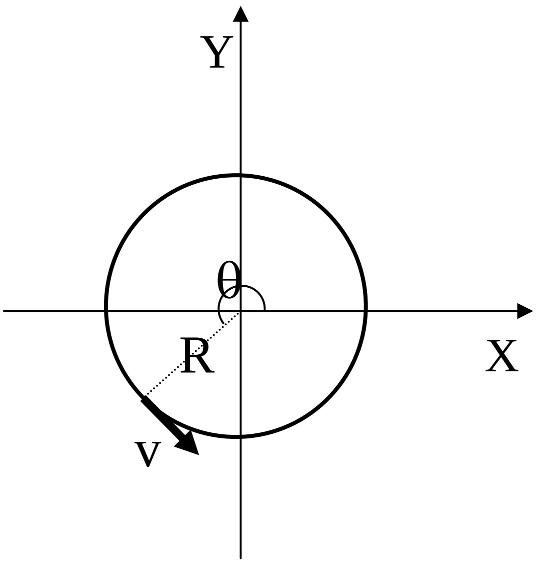
SOLUZIONE

Problema 1

Un punto materiale e' in moto lungo una circonferenza di raggio R = 1.2 m con centro nell'origine O di un sistema di assi cartesiani. La posizione del punto sulla circonferenza e' inviduata dal vettore **r** che, durante il moto forma con l'asse x un angolo θ tale che $\theta = a\,t - b\,t^2$ con a = 2 rad/s e b = 0.17 rad/s^2.

Determinare:

1. il modulo del vettore accelerazione dopo che il punto materiale ha percorso 1/2 giro;
   a=.............
2. il modulo del vettore velocità del punto materiale e le sue componenti cartesiane all'istante t = 3 s; v=................v_x=..................v_y=......................
3. dopo quanto tempo dall'istante iniziale il punto inverte il moto.
   t_1=....................



Il problema si può risolvere in due modi equivalenti: riferendo il moto al sistema di assi cartesiani X,Y o riferendolo ad un sistema solidale al punto materiale con un asse tangente alla traiettoria (parallelo ed equiverso alla velocità istantanea) e uno normale alla traiettoria, diretto verso il centro. Traducendo il moto nel sistema cartesiano e utilizzando le formule di scomposizione del moto circolare si ottiene:

$$\vec{r} = r_x \vec{u}_x + r_y \vec{u}_y \qquad \begin{cases} r_x = R\cos\theta \\ r_y = R\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{dr_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(R\cos\theta(t)\right) = -R\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ v_y = \dfrac{dr_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(R\sin\theta(t)\right) = R\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(-R\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\right) = -R\left[\cos\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right] \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(R\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}\right) = R\left[-\sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right] \end{cases}$$

Nel problema in oggetto $\theta(t)=at-bt^2$ per cui le derivate dell'angolo assumono la forma:

$$\frac{d\theta}{dt} = a - 2bt \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -2b$$

La velocità angolare dipende dal tempo, inizialmente ha un valore positivo, poi si annullerà e assumerà valori negativi, l'accelerazione angolare è costante e negativa.
L'istante in cui il punto materiale ha compiuto mezzo giro si ottiene imponendo:

$$\pi = at - bt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b\pi}}{2b} = \begin{matrix} 9.89s \\ 1.87s \end{matrix}$$

Le due soluzioni corrispondono al fatto che il punto arriverà una prima volta nella posizione $\theta=\pi$ e poi vi ripasserà per la posizione quando la velocità angolare avrà invertito il suo verso. Di conseguenza la soluzione che si deve utilizzare per rispondere alla domanda è quella corrispondente al tempo minore. Si avrà:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -R\left[\cos\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -1.2\left[\cos\pi(2 - 2\cdot 1.87\cdot 0.17)^2\right] = 2.233 m/s^2 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = R\left[-\sin\theta\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos\theta\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 1.2\left[\cos\pi(-2\cdot 0.17)\right] = 0.408 m/s^2 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2.233^2 + 0.408^2} = 2.27 m/s^2$$

L'accelerazione ha componente positiva sia lungo x che lungo y .
Per trovare componenti e modulo della velocità all'istante t=3s basta introdurre questo valore nelle formule scritte sopra:

$$\theta(3) = 4.47 rad = 256° \qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{d}{dt}\left(R\cos\theta(3)\right) = -R\sin 256\left(2 - 2\cdot 0.17\cdot 3\right) = 1.141 m/s \\ v_y = \dfrac{d}{dt}\left(R\sin\theta(3)\right) = R\cos 256\left(2 - 2\cdot 0.17\cdot 3\right) = -0.284 m/s \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1.176 m/s$$

Il punto invertera il suo moto quando la sua velocità angolare si annullerà, quindi quando:

$$0 = \frac{d\theta}{dt} = a - 2bt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{a}{2b} = 5.88s$$

Se, invece, si riferisce il moto al sistema mobile solidale al punto si ha:

$$\vec{v} = v\vec{u}_T = \omega R\vec{u}_T \qquad \begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\omega R) \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R \end{cases} \qquad \omega = \frac{d\theta(t)}{dt} = a - 2bt$$

L'istante per il quale il punto ha percorso mezzo giro si trova come sopra, per cui:

$$\begin{cases} a_T = -0.408 m/s^2 \\ a_N = 2.233 m/s^2 \end{cases} \qquad a = \sqrt{a_T^2 + a_n^2} = 2.27 m/s^2$$

Solo perchè stiamo analizzando il moto a $\theta=\pi$ le direzioni degli assi cartesiani e degli assi mobili coincidono, per cui coincidono i valori assoluti delle componenti. L'asse normale e l'asse x hanno anche lo stesso verso per cui le due componenti coincidono, l'asse y e l'asse tangente hanno versi opposti, il segno negativo dell'accelerazione tangente sta ad indicare che la componente è diretta verso l'alto.
Per trovare il modulo e le componenti della velocità all'istante t=3 bisogna identificare la direzione che il versore della velocità fa con l'asse delle x. Guardando la figura si ricava che l'angolo tra il versore della velocità e l'asse delle x è $(\pi/2+\theta)$, da cui:

$$\theta(3) = 256° \qquad \beta = \frac{\pi}{2} + \theta = 346° \qquad \begin{cases} v_x = \omega R\cos\beta = 1.141 m/s \\ v_y = \omega R\sin\beta = -0.284 m/s \end{cases} \qquad v = \omega R = 1.176 m/s$$

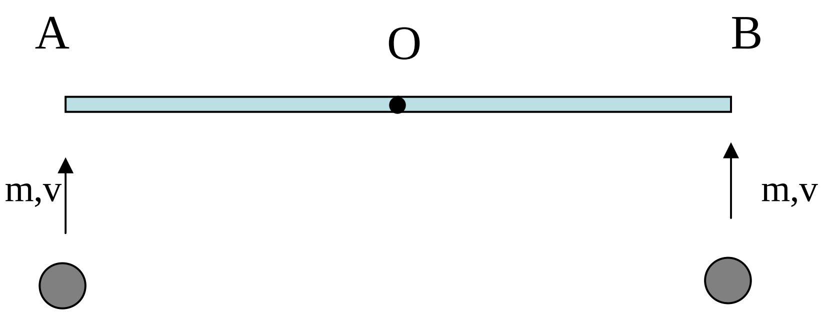
Problema 2

Un'asta sottile e omogenea di massa M=3 kg e lunghezza L=1.5 m può ruotare su un piano orizzontale attorno a un asse verticale passante per il suo punto medio O in presenza di un momento di attrito (costante) τ_a=0.20 Nm. Inizialmente l'asta e' ferma.
All'istante t=0, un punto materiale, di massa m=0.7 kg e velocità v=5 m/s, urta l'estremo **A** dell'asta e vi rimane conficcato. Allo stesso istante, un altro punto materiale, di pari massa e con velocità uguale al precedente, urta l'estremo **B** e rimbalza con velocità v'= -v/2.
Determinare:
1) La velocità angolare ω del corpo rigido subito dopo l'urto e il verso di rotazione

ω=............

2) L'impulso impresso dal vincolo durante l'urto al sistema costituito dall'asta e dai due punti materiali; J=............
3) Il numero di giri descritti dal corpo rigido dopo l'urto, prima di fermarsi;

n=.............



Il momento angolare del sistema, calcolato rispetto al vincolo fisso O, si conserva durante l'urto. Le due masse incidono con la stessa velocità da parti opposte rispetto al vincolo, per cui il momento angolare immediatamente prima dell'urto è nullo. Dopo l'urto il sistema composto dall'asta+la massa inizierà a ruotare, mentre la massa che rimbalza avrà un momento angolare rispetto al vincolo che è dato dalla sua quantità di moto moltiplicata la distanza da O, da cui:

$$L_i = L_f \qquad L_i = mv\frac{L}{2} - mv\frac{L}{2} = 0 \qquad L_f = I_{tot}\,\omega + mv'\frac{L}{2}$$

$$I_{tot} = \frac{ML^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0.956\,kgm^2$$

$$\omega = -\frac{mv'L}{2I_{tot}} = \frac{mvL}{4I_{tot}} = 1.373\,rad/s$$

La velocità angolare è positiva per cui il sistema ruota in senso antiorario.
L'impulso dato dal vincolo è, per definizione, pari alla variazione della quantità di moto del sistema nel suo complesso. La quantità di moto iniziale è quella delle due masse, la quantità di moto finale è quella del CM del sistema. Considerando che il CM della sbarra non si muove dopo l'urto, la quantità di moto del sistema rigido sbarra+massa attaccata è solo quella della massa che ruota rigidamente con la sbarra e ha velocità lineare equiversa (ambedue negative) a quella della pallina che rimbalza:

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i \qquad P_i = 2mv \qquad P_f = -m\omega\frac{L}{2} - m\frac{v}{2}$$

$$J = -m\omega\frac{L}{2} - m\frac{v}{2} - 2mv = -9.47\,kgm/s$$

L'energia cinetica del sistema sbarra+massa attaccata viene dissipata per effetto dell'azione del momento di attrito, per cui:

$$W_{att} = \Delta E_c \qquad 0 - \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 = -\tau\theta \Rightarrow \qquad \theta = \frac{I_{tot}\omega^2}{2\tau} = 4.505\,rad = 0.717 \approx 0.72\,giri$$

Problema 3

Una mole di gas ideale biatomico, inizialmente in equilibrio alla pressione p_1 (incognita) e al volume V_1=12 10^{-3} m^3, si espande adiabaticamente e irreversibilmente contro la pressione esterna costante p_0=10^5 Pa, fino al volume V_2=25 10^{-3} m^3. Lo stato (p_0, V_2) è di equilibrio per il gas. In seguito il gas viene compresso isotermicamente e reversibilmente finchè raggiunge un nuovo stato di equilibrio (p_3, V_3). In tale processo scambia il calore Q_{23}= - 6280 J. Infine il gas torna allo stato iniziale tramite una trasformazione reversibile in cui compie un lavoro W_{31}=6000 J.
Si determinino:

1) La temperatura T_1 T_1=.............
2) Il volume V_3 V_3=................
3) Il calore scambiato nella trasformazione 3-1 Q_{31}=.............

1-

$$Q_{12} = 0 \Rightarrow W_{12} = -\Delta U_{12} \Rightarrow p_0(V_2 - V_1) = nc_V(T_1 - T_2)$$

$$T_2 = \frac{p_0V_2}{nR} = 300.7K$$

$$T_1 = 300.7 + \frac{p_0\Delta V}{nc_V} = 363K$$

2- Trasformazione isoterma reversibile:

$$Q_{23} = W_{23} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = -6280J$$

$$V_3 = .0811V_2 = 2.03 \cdot 10^{-3} m^3$$

3- La trasformazione 3-1 è una qualsiasi trasformazione reversibile, vale comunque il primo principio:

$$Q_{31} = W_{31} + \Delta U_{31} = 6000 + nc_V (T_1 - T_2) = 7300J$$